A soma de séries na obra *De triplici Motu* de Álvaro Tomás

Carlos Correia de Sá[1]

Introdução

Sabe-se muito pouco sobre a vida de Álvaro Tomás. Deve ter nascido em Lisboa na penúltima década do século XV. Na segunda década do século seguinte encontramo-lo na Universidade de Paris, ensinando no *Collège de Cocqueret*, e depois como estudante na Faculdade de Medicina. Para uma síntese biográfica de Tomás, indica-se o excelente artigo introdutório (Leitão 2000).

O único trabalho conhecido de Tomás é o *Liber de triplici Motu*, publicado em Paris em 1509. A obra está dividida em duas partes. A primeira é dedicada à exposição da Teoria das Proporções na versão de Nicómaco de Gerasa, e a segunda é o tratado de Filosofia Natural (isto é, de Física) propriamente dito. Esta segunda parte divide-se por sua vez em quatro "tratados"; o primeiro é dedicado aos movimentos locais no que respeita às causas, o segundo aos movimentos locais no que respeita aos efeitos, o terceiro aos movimentos de aumento e diminuição, e o quarto aos movimentos de alteração.

Convém insistir em que o *De triplici Motu* de Álvaro Tomás é, no seu âmbito mais alargado, uma obra de Física e não de Matemática. Trata-se, como é óbvio, de Física no sentido aristotélico, tal como foi estudada e desenvolvida nas universidades europeias dos finais da Idade Média e do princípio do Renascimento. Tradicionalmente, este ramo do saber escolástico consistia mais no estudo qualitativo de certos fenómenos da Natureza, do que na sua quantificação. Mas há uma clara filiação do *De triplici Motu* na corrente dos calculadores de Oxford, que iniciaram o estudo da quantificação das qualidades intensivas. O próprio título completo[2] do livro de Tomás faz referência a Richard Swineshead (Suiseth), figura de proa do *Merton College* no século XIV e que geralmente era designado como o Calculador: *Livro sobre o movimento triplo com um anexo sobre proporções do mestre Álvaro Tomás Lisboeta esclarecendo em parte as calculações filosóficas de Suiseth*. Além disso, o título dá destaque ao anexo sobre a teoria das proporções, instrumento indispensável dessa quantificação no início do século XVI. Portanto, o *De triplici Motu* apresenta também um certo pendor quantitativo, que fornece o contexto em que Tomás formula considerações e resultados que podem ser interpretados em termos de séries infinitas de números reais positivos. Esta comunicação debruçar-se-á sobre as doze *conclusões* acerca de movimentos uniformemente diformes contidas no terceiro capítulo do segundo tratado[3].

Embora não haja referências a isso no título, o *De triplici Motu* sofre também uma influência notória da escola de Paris, e nomeadamente de Nicole Oresme, nome referido várias vezes no texto (com a grafia *Horem* ou *Horen*). Esta ligação é muito natural, dada a importância das contribuições da escola parisiense do século XIV para os estudos de cinemática e de dinâmica, e dado que Tomás ensinava justamente na Universidade de Paris, onde Oresme tinha trabalhado 150 anos antes; mas, apesar disso, a Teoria das Configurações,

[1] Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto; Centro de Matemática da Universidade do Porto.

[2] *Liber de triplici motu proportionibus annexis magistri Alvari Thome Ulixboñ philosophicas Suiseth calculatões ex parte declarãs*.

[3] O movimento local é estudado no *Segundo tratado, em que se trata da velocidade e da lentidão do movimento no que respeita ao efeito, começando pelo movimento local como se a priori*; os resultados que nos interessam constituem o *Capítulo terceiro, em que se mostra o modo de conhecer e de medir os movimentos uniformemente diformes e diformemente diformes, quanto ao tempo e quanto à velocidade, em todas as espécies, etc*.

que Oresme propõe na primeira parte do tratado *De Configurationibus Qualitatum et Motuum*, está completamente ausente do *De triplici Motu*. Mesmo quando reproduz exactamente um exemplo já estudado por Oresme, Tomás não se socorre de nenhum diagrama, seja para justificar as suas afirmações, seja meramente para auxiliar o leitor na compreensão dos enunciados.

No sétimo capítulo da parte III do *De Configurationibus*, Oresme demonstra geométricamente um famoso resultado (conhecido como *Teorema de Merton* ou *Teorema do Valor Médio*), de que os físicos de Oxford já haviam dado demonstrações de cariz aritmético. Este teorema responde a uma questão importante, que pode ser formulada para a distribuição de qualquer qualidade intensiva por um sujeito unidimensional[4], mas que enunciarei aqui apenas para o caso do *movimento local*: dado um movimento uniformemente diforme, será possível substituí-lo (para alguns efeitos, obviamente) por um movimento uniforme? O resultado descoberto pelos físicos quatrocentistas do *Merton College* diz que sim: *para efeitos de espaço percorrido*, um movimento uniformemente diforme pode ser substituído pelo movimento uniforme no mesmo período de tempo e com velocidade igual à do instante médio do primeiro.

É absolutamente natural colocar a mesma questão para o caso dos movimentos (ou, mais geralmente, das distribuições de qualidades intensivas) diformemente diformes. Não há, contudo, para esta segunda questão, uma resposta universal como havia para a primeira. O que Oresme faz, depois de dar a sua demonstração geométrica do Teorema de Merton, é dar a resposta para alguns (escassíssimos) casos particulares.

De facto, os exemplos são apenas três. Em *De Configurationibus* III, 8 Oresme aborda um tipo de situação que Tomás tratará com mais prolixidade: a *divisão em partes continuamente proporcionais* do período de tempo em que o movimento decorre (ou do sujeito unidimensional pelo qual a qualidade se distribui). A cada parte proporcional do tempo (ou do sujeito) corresponde uma intensidade diferente da velocidade (ou da qualidade intensiva), mas as regras de dependência consideradas são muito limitadas: apenas se consideram variações segundo a proporção artitmética ou segundo a proporção geométrica. O exemplo do capítulo III, 9 distingue-se do anterior pela diferente razão em que o tempo (ou o sujeito) se divide e também pela diferente relação entre as intensidades da velocidade (ou da qualidade) em cada uma das partes. A originalidade do exemplo apresentado no capítulo III, 10 reside em que às partes de ordem ímpar corresponde uma distribuição uniforme, tal como acontecia nos dois exemplos anteriores, enquanto que às partes de ordem par corresponde uma distribuição uniformemente diforme. Em III, 11 Oresme propõe uma outra maneira de olhar para a configuração tratada em III, 8; é uma observação interessantíssima, mas refere-se a um período de tempo (ou a um sujeito) infinito e, nesse sentido, não tem correspondente no *De Triplici Motu* de Tomás.

5º capítulo da 1ª parte

A primeira parte do *De triplici Motu* começa por uma exposição sucinta sobre *razões* e *proporções* de números naturais. A terminologia pesada das razões *supraparticulares* e *supraparcientes* é a de Nicómaco de Gerasa[5].

Embora Tomás apenas utilize razões entre grandezas comensuráveis, não deixa de indicar como encontrar grandezas cuja razão seja *irracional* (isto é, que não possa exprimir-se por razões de números naturais). Toma o exemplo do lado e da diagonal dum quadrado, o que lhe fornece ocasião para apresentar uma das raríssimas figuras do livro (fl. *a* 3^{v}).

---

4 Oresme trata também os casos em que o sujeito é bidimensional ou tridimensional. Estas situações não serão aqui mencionadas, pois não têm aplicação directa ao estudo do movimento local.

5 A *Introdição à Aritmética* de Nicómaco está disponível, em tradução para a língua inglesa, em (Nicomachus of Gerasa 1952).

Nesta primeira parte, interessa-nos apenas observar as duas últimas suposições e a primeira conclusão do quinto capítulo[6].

Terceira suposição. Quando houver alguma proporção contínua, segundo uma proporção geométrica, aquela que for a proporção entre as proporcionais, tal é [também a proporção] entre as suas diferenças ou excessos. Que o mesmo é que, tal como 8 está para 4 na proporção dupla e analogamente 4 [está] para 2 na mesma proporção, formando proporção contínua, assim a diferença ou excesso entre 8 e 4 está para a diferença ou excesso entre 4 e 2 na proporção dupla. (…) (Tomás 1509, fl. *a* 5^r)

Ou seja, designando por p_1, p_2, … p_n, … as diferentes partes em que se decompõe um dado todo e fazendo uso de notação simbólica (que obviamente Tomás não conhece), bem como da letra g (que Tomás introduzirá mais adiante), temos que

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_3}{p_4} = \cdots = g \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1 - p_2}{p_2 - p_3} = \frac{p_2 - p_3}{p_3 - p_4} = \cdots = g \, .$$

Esta suposição lembra duas proposições dos *Elementos* de Euclides, a 19ª do livro V (relativa a *grandezas*) e a 11ª do livro VII (relativa a *números*). Podem ambas traduzir-se simbolicamente por

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} \, .$$

A diferença entre estas proposições de Euclides e a 3ª suposição de Tomás está na quantidade dos números ou das grandezas envolvidos. As proposições euclidianas aplicam-se a quantidades *finitas* de números ou de grandezas, enquanto que a 3ª suposição de Tomás se refere a um todo dividido em *infinitas* partes proporcionais.

A 4ª suposição é um corolário da anterior.

Quarta suposição. Se se dividir qualquer corpo em infinitas partes; e se, perdendo a primeira delas, [o corpo] perder qualquer proporção, digamos *a*, isto é, se tornar menor na proporção *a*; e, perdendo a segunda depois da primeira, se tornar menor segundo *a*; e, perdendo a terceira depois da segunda, se tornar novamente menor segundo *a*; e assim sucessivamente, [então] todas aquelas partes são partes proporcionais daquele corpo segundo a proporção *a*. (…) (Tomás 1509, fl. *a* 5^r)

Esta suposição pode traduzir-se por[7]

$$\frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}{p_2 + p_3 + p_4 + \cdots} = \frac{p_2 + p_3 + p_4 + \cdots}{p_3 + p_4 + p_5 + \cdots} = \cdots = g \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_3}{p_4} = \cdots = g \, .$$

Como primeira conclusão, Tomás apresenta a proposição recíproca da 4ª suposição:

Posto isto, seja a primeira conclusão. Quando se divide qualquer corpo em qualquer género de proporção, o corpo todo deverá estar para o agregado de todas as suas partes proporcionais a seguir à primeira na proporção em que o corpo se divide. Exemplo: como se o corpo se dividir segundo a proporção sesquiáltera, é preciso que o corpo esteja para o agregado de todas as partes proporcionais a seguir à primeira na proporção sesquiáltera. (...) (Tomás 1509, fl. *a* 5^r)

Ou seja,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_3}{p_4} = \cdots = g \quad \Rightarrow \quad \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}{p_2 + p_3 + p_4 + \cdots} = g \, .$$

[6] São enunciadas no *Capítulo quinto, em que se trata da divisão dum corpo em partes proporcionais na proporção racional que se quiser.*

[7] Na transcrição simbólica, a letra *a* desta passagem foi substituída pela letra *g*, que Tomás utilizará consistentemente no terceiro capítulo do segundo tratado da segunda parte.

Também este resultado é sugestivo de duas proposições de Euclides, desta vez *Elementos* V, 12 e VII, 12, que podem representar-se simbolicamente por

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}.$$

Tal como acontecia com a 3ª suposição, também a 1ª conclusão não decorre das proposições euclidianas, em virtude de envolver uma quantidade infinita de partes proporcionais.

1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª conclusões

Logo no início do terceiro capítulo do segundo tratado da primeira parte, Tomás repete a conclusão que acabámos de ver (do quinto capítulo da primeira parte).

Primeira conclusão. Dividido algum corpo ou latitude em partes proporcionais segundo qualquer proporção que quiseres, todo esse corpo ou latitude está para o resíduo da primeira parte proporcional na proporção em que o mesmo [corpo] ou a mesma latitude se dividem. Esta é a conclusão primeira e fundamental que se indica no quinto capítulo da primeira parte desta obra; veja-se nesse local. (Tomás 1509, fl. *p* 4^v)

As 2ª e 4ª conclusões são particularmente importantes. A situação nelas estudada é uma generalização da considerada por Oresme em *De Configurationibus* III, 8. Um certo período de tempo é dividido em partes proporcionais segundo uma razão qualquer (e não necessariamente segundo a razão dupla), e considera-se um móvel que se move com uma certa velocidade durante a primeira dessas partes proporcionais do tempo, com o dobro dessa velocidade durante a segunda parte do tempo, com o triplo dessa velocidade durante a terceira parte, e assim sucessivamente.

Segunda conclusão. Dividido algum tempo em partes proporcionais segundo qualquer proporção, seja algum móvel que se move na primeira parte proporcional [do tempo] com alguma velocidade, e na segunda com [velocidade] duplamente maior do que na primeira, e na terceira triplamente maior do que na primeira, e na quarta quadruplamente maior, e assim sucessivamente, ascendendo por todas as espécies de proporção múltipla; tal velocidade de todo esse tempo e de todas as suas partes proporcionais está para a velocidade da primeira parte proporcional [do tempo] na proporção em que todo esse tempo assim dividido [está] em ordem à [sua] primeira parte proporcional. (Tomás 1509, fl. *p* 4^v)

A boa compreensão desta passagem exige um esclarecimento relativamente a um pormenor terminológico. Para a generalidade dos físicos que se debruçam sobre o movimento local (e para Oresme, em particular), a *velocidade total* é o *espaço percorrido*, o que está de acordo com a terminologia usada no restante da teoria das qualidades intensivas, de que a distribuição das velocidades por um período de tempo é apenas um caso particular. Para Tomás, pelo contrário, a *velocidade total* (aqui expressa por *velocidade de todo esse tempo e de todas as suas partes proporcionais*) é a *velocidade média*, isto é, a velocidade que, se fosse constante ao longo de *todo* o período de tempo, faria o móvel percorrer exactamente o mesmo espaço. Portanto, a ideia da 2ª conclusão é a de procurar um movimento uniforme que possa, *para efeitos de espaço percorrido*, substituir o movimento diformemente diforme em consideração. Tomás afirma que a velocidade de tal movimento é a que se comporta para com a velocidade da primeira parte exactamente da mesma maneira que o período de tempo total se comporta para com a sua primeira parte. Em linguagem da teoria das proporções: a razão do tempo total para a primeira parte do tempo é igual à razão da velocidade média para a velocidade durante a primeira parte do tempo.

Antes de passar à demonstração, Tomás dá um exemplo:

Como se aquele tempo for dividido em partes proporcionais segundo a proporção sesquiáltera e as velocidades das suas partes proporcionais se dispuserem do modo que a conclusão põe, então digo que a velocidade total do tempo todo está para a velocidade da primeira parte proporcional exactamente segundo a proporção tripla, pelo facto de que todo o tempo dividido em partes proporcionais na proporção sesquiáltera está para a [sua] primeira [parte] proporcional na proporção tripla. Efectivamente, a primeira parte é a terça [parte] do todo, como mostra a quarta conclusão do quinto capítulo da primeira parte desta obra. (Tomás 1509, fl. *p* 4^v)

Seja g a razão das partes proporcionais do tempo. A primeira ideia da demonstração da 2ª conclusão é a de considerar o excedente da velocidade em cada parte proporcional do tempo relativamente à velocidade na parte anterior e de estender esse excedente a todas as partes seguintes. Se v_n for a velocidade da n-ésima parte proporcional do tempo, então pode estender-se $v_n - v_{n-1} (= v_1)$ da n-ésima parte do tempo em diante. Como os excedentes de velocidade são todos iguais, os espaços percorridos em virtude desses excedentes são proporcionais aos tempos; portanto, pela 1ª conclusão, estarão (tal como os tempos) em proporção contínua na razão g.

Também se prova universalmente esta conclusão, e suponho que, quando as velocidades estão [entre si] do modo que o texto da conclusão pretende, então estende-se pelo tempo todo aquela velocidade que se estende pela primeira parte proporcional, e estende-se por todo o resíduo da primeira exactamente tanta quanta não foi comunicada à primeira e extensa por todo o tempo, e estende-se novamente por todo o resíduo da primeira e da segunda parte proporcional exactamente tanta velocidade quanta não foi comunicada a alguma das precedentes, e assim sucessivamente. Esta suposição fica assim manifestamente evidente, uma vez que, se a velocidade na segunda parte proporcional for dupla da velocidade na primeira, e na terceira for tripla, etc., a mesma segunda contém uma velocidade duas vezes tão intensa quanto a primeira não comum, e a terceira parte contém três vezes tanta, e assim sucessivamente; e por consequência o resíduo da primeira contém uniformemente duas vezes tanta velocidade como a primeira (ainda que não exactamente, pois de facto contém mais) e o resíduo da segunda parte proporcional três vezes tanta por todo, ainda que não exactamente, e assim sucessivamente aquelas partes excedem-se sempre continuamente por uma velocidade igual à velocidade da primeira parte proporcional. (Tomás 1509, fl. *p* 4^v)

Segue-se uma das passagens mais interessantes do *Liber de Triplici Motu*, pelo uso de letras para designar razões em abstracto.

Suposto isto, prova-se a conclusão; e quero que a hora seja dividida em partes proporcionais em qualquer proporção (quanta se quiser) que seja *g*, e coestendam-se aquelas velocidades como diz o caso da conclusão por aquelas partes proporcionais, e seja *f* a proporção da hora toda, dividida em partes proporcionais segundo a proporção *g*, para a primeira parte proporcional; então digo que toda a velocidade da hora toda está na proporção *f* para a velocidade da primeira parte proporcional. (Tomás 1509, fls. *p* 4^v, *q* 1^r)

Trata-se, porém, duma abstracção ainda incipiente. É claro que as razões g e f não podem tomar-se independentemente uma da outra, mas Tomás não está em condições de explicitar a relação de dependência entre elas. Usando simbologia algébrica, essa relação pode escrever--se como

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{1}{1},$$

como imediatamente se observa a partir de

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \cdots} + \frac{p_2 + p_3 + p_4 + \cdots}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \cdots}.$$

Voltemos à argumentação de Tomás. A segunda ideia da demonstração é a de ver o que acontece se os mesmos excedentes de velocidade forem extensos à hora toda e, simultaneamente, diminuídos em intensidade (de modo a provocarem o percurso do mesmo espaço). Como os espaços percorridos são os mesmos que anteriormente, são agora estes novos graus de velocidade que estão em prporção contínua na razão g. Ora, a velocidade média não é mais do que a soma de todos os excedentes deste segundo tipo. Portanto, a velocidade média estará para a velocidade v_1 na razão f, exactamente como sucede com os tempos.

O que se prova assim: porque a velocidade igual à velocidade na primeira parte proporcional extensa por aquela hora faz [isto é, contribui] alguma coisa para a intensidade de toda a velocidade porque é parte dela, como mostra a suposição precedente, e tanta velocidade como essa se estende, adicionada à pré-existente, por todo o resíduo da primeira parte proporcional segundo a proporção *g*, como também diz a suposição. Portanto, ela perfaz menos na proporção *g*, porque é igual [em intensidade] à outra, extensa pelo todo, mas está num tempo menor na proporção *g*, como diz a primeira conclusão; porque o tempo se divide segundo a proporção *g*, logo o todo está para o resíduo da primeira parte proporcional na proporção *g*. Igualmente, estende-se de novo tanta velocidade não comum a alguma das precedentes por todo o resíduo da primeira parte proporcional e da segunda, e esse tempo resíduo da primeira e da segunda está na proporção *g* para todo o resíduo da primeira. Portanto, a velocidade a ele coextensa denomina menos na proporção *g* do que a precedente velocidade igual coextensa a um sujeito maior do que ele na proporção *g*, e assim sucessivamente. Portanto, a denominação total da velocidade compõe-se de infinitas [partes] que estão entre si na proporção contínua *g*. (Tomás 1509, fl. *q* 1^r)

Uma vez mais é manifesto que o *espaço* percorrido (a *denominação total da velocidade*, na terminologia de Tomás) é uma noção central desta demonstração Embora o objectivo desta 2ª conclusão seja o estudo da velocidade média (como veremos de seguida, a questão do espaço percorrido é remetida para a 4ª conclusão), Tomás precisa de raciocinar desde logo sobre o espaço, ainda que para tirar uma conclusão relativa à velocidade apenas.

Já a segunda observação me parece mais delicada, pelo que a passagem seguinte[8] merece ser lida com especial cuidado.

Portanto, a denominação total da velocidade compõe-se de infinitas [partes] que estão entre si na proporção contínua *g*. Logo, a denominação de toda a velocidade, ou a velocidade toda (pois entendo por isso o mesmo), está para a primeira daquelas denominações ou velocidades, que é da primeira parte proporcional e também de todo o resíduo da primeira, na proporção *f*, que é o que havia a inferir. Esta consequência é patente porque, sempre quando algo se divide na proporção *g*, o próprio está para a primeira parte proporcional na proporção *f*, como foi posto. E disto é patente que, no caso da conclusão, a velocidade toda está para a velocidade da primeira parte proporcional na proporção em que o tempo todo está em ordem à primeira parte proporcional segundo a proporção pela qual se divide o mesmo tempo, que era o que havia a provar.

A 3ª conclusão não é um resultado que se possa traduzir em termos de séries, mas sim um lema para ser utilizado na demonstração da conclusão que se lhe segue.

Terceira conclusão. Dividida uma hora ou algum tempo em qualquer proporção que queiras, na primeira parte de tal proporção mova-se algum móvel exactamente com certa velocidade, e mova-se outro móvel, ou o mesmo, em toda aquela hora ou tempo com a mesma velocidade; então, em qualquer proporção que o tempo esteja para a primeira parte proporcional, nessa proporção estará o espaço terminado ou percorrido no tempo todo para o espaço percorrido na primeira parte proporcional. (Tomás 1509, fl. *q* 1^r)

Portanto, quando a velocidade se mantém constante, o espaço percorrido é proporcinal ao tempo de percurso[9].

A 4ª conclusão retoma a situação considerada na 2ª, mas debruça-se agora sobre a questão do espaço percorrido, ou melhor, da razão entre o espaço percorrido na hora toda e o espaço percorrido na primeira parte proporcional da hora.

Quarta conclusão. Dividida a hora em qualquer proporção que queiras em partes proporcionais, mova-se algum móvel na primeira daquelas partes proporcionais com alguma velocidade, e na segunda com velocidade duplamente maior do que na primeira, e na terceira triplamente maior do que na primeira, e assim sucessivamente; então, nesse caso, a velocidade total estará para a velocidade da primeira parte proporcional na proporção em que o tempo todo está para a sua primeira parte proporcional, e o espaço percorrido no tempo todo estará para o espaço percorrido na primeira parte proporcional exactamente na proporção duplicada. (Tomás 1509, fl. *q* 1^r)

---

[8] A primeira frase desta citação é repetição da última da anterior.

[9] Esta ideia tão simples tem uma longa e intricada história na Antiguidade e na Idade Média; veja-se, por exemplo, (Clagett 1959, Págs. 163-186).

Para ilustrar a conclusão, Tomás volta a apresentar o exemplo em que a hora está dividida em partes proporcionais na proporção sesquiáltera. Já se tinha visto, a propósito da 2ª conclusão, que neste caso a velocidade média é tripla da velocidade da primeira parte da hora. Agora, a 4ª conclusão afirma que o espaço percorrido na hora toda é nônuplo do espaço percorrido nessa primeira parte da hora.

Quero dizer que se a hora se dividir do modo posto na conclusão, por exemplo se se dividir na proporção sesquiáltera, e o móvel se mover por essas partes proporcionais (...) como diz o caso da conclusão, então a velocidade total de tal movimento estará para a velocidade da primeira parte proporcional na proporção tripla, porque assim está um todo dividido segundo a proporção sesquiáltera para a primeira parte proporcional, como é patente da quarta conclusão do quinto capítulo da primeira parte; e o espaço percorrido na hora toda está para o espaço percorrido na primeira parte proporcional na proporção dupla da tripla, porque é tripla a proporção das velocidades. Ora essa proporção tripla duplicada é a nônupla, como é patente da oitava conclusão do sexto capítulo da segunda parte. E assim, se [o móvel] percorrer um pé na primeira parte, percorrerá nove [pés] na hora toda. A conclusão demonstra-se assim; seja um móvel que se mova exactamente com a velocidade da primeira parte proporcional tão somente durante a primeira parte proporcional [do tempo] e percorra o espaço *c*; e mova-se outro móvel durante a hora toda com a velocidade da primeira parte proporcional e percorra o espaço *b*; e mova-se um terceiro móvel durante a hora toda com aquela velocidade total, assim como se põe no caso da conclusão, que esteja na proporção *f* para a velocidade da primeira das partes proporcionais, como diz a segunda conclusão, (...) e percorra o espaço *a*; e argumenta-se assim; do espaço *a* para o espaço *b* há a proporção *f*, porque os tempos nos quais são percorridos são iguais e a velocidade com que é percorrido *a* é maior na proporção *f* do que a velocidade com que é percorrido *b*, como é patente pelo caso; e, além disso, do espaço *b* para o espaço *c* há a proporção *f*; e *a* é o espaço percorrido na hora toda no caso da conclusão e *c* [é o espaço] percorrido na primeira parte proporcional. (Tomás 1509, fl. *q* 1^r^)

Designemos por v_1 a velocidade do móvel durante a primeira parte da hora e por v_M a velocidade média. Tomás chama
- *c* ao espaço percorrido na primeira parte da hora com a velocidade v_1;
- *b* ao espaço percorrido na hora toda com a velocidade v_1;
- *a* ao espaço percorrido na hora toda com a velocidade v_M.

A 3ª conclusão garante que *b* está para *c* na razão *f*, porque ambos os espaços são percorridos com a mesma velocidade. E *a* está para *b* na razão de v_M para v_1 (que também é *f*) porque os dois movimentos decorrem no mesmo intervalo de tempo. Portanto, compondo estas duas razões, conclui-se que *a* está para *c* na razão f^2 (a razão *duplicada* de *f*, na terminologia aditiva das teorias das proporções).

A 5ª conclusão não é mais do que uma chamada de atenção para os casos particulares da 2ª e da 4ª, que se obtêm ao considerar *g* como uma razão supraparticular. Como é óbvio, verifica-se nestes casos que a velocidade média é uma das velocidades atribuídas ao móvel numa das partes proporcionais da hora.

6ª, 7ª, 8ª e 9ª conclusões

As quatro conclusões que se seguem são menos interessantes do que a 2ª e a 4ª, pelo menos do ponto de vista das séries. Agora não é só o tempo que está dividido em partes continuamente proporcionais, mas são também as velocidades em cada parte proporcional do tempo que constituem uma progressão geométrica. Portanto, os diferentes espaços percorridos (produto dos tempos pelas velocidades ou, se se preferir, proporcionais a áreas de rectângulos cujas bases são proporcionais aos tempos e cujas alturas são proporcionais às velocidades) constituem também eles uma progressão geométrica.

Na 6ª conclusão afirma-se que, se a velocidade em cada parte proporcional for crescendo numa razão igual ou maior do que aquela em que as partes proporcionais diminuem, então tanto a velocidade média como o espaço percorrido serão infinitos. Ou seja, Tomás mostra saber que uma série geométrica só converge se a razão for inferior à unidade.

Sexta conclusão. Dividida a hora em qualquer proporção que quiseres, qualquer que seja a proporção entre duas partes imediatas, esteja nessa mesma proporção ou numa maior a velocidade da [parte] menor para a velocidade da [parte] maior; [então] toda essa velocidade é infinita e o espaço percorrido será, pela mesma razão, infinito. (Tomás 1509, fl. *q* 2^r^)

Embora o enunciado mantenha a ordem formalmente adoptada nas 2ª e 4ª conclusões (primeiro a velocidade e só depois o espaço), a demonstração exibe uma inversão deste procedimento.

Prova-se a segunda parte da conclusão; porque nesse caso o móvel que assim se mover percorre tanto espaço na parte seguinte como na anterior, ou mais, e há infinitas partes proporcionais; logo, na hora toda percorrerá [um espaço] infinito. (...) E assim é patente a segunda parte [da conclusão] e, por consequência, [também] a primeira. Efectivamente, se mediante essa velocidade o móvel percorre um espaço infinito, é forçoso que essa velocidade seja infinita. Portanto, a conclusão é patente. (Tomás 1509, fl. *q* 2^r^)

Portanto, desta vez, Tomás começa explicitamente por demonstrar a parte referente ao espaço, que ocupa o segundo lugar no enunciado da conclusão. A parte relativa à velocidade segue então como um corolário imediato, uma vez que um espaço infinito não pode ser percorrido a velocidade finita em tempo finito.

Na 7ª e na 8ª conclusões, compõem-se e separam-se razões de progressões geométricas[10]. A dualidade dos conteúdos e a semelhança formal da apresentação de Tomás justificam que sejam aqui tratadas em simultâneo.

Se a velocidade em cada parte proporcional do tempo for crescendo numa razão menor do que aquela em que as partes proporcionais do tempo diminuem, então os diversos espaços (percorridos durante as diferentes partes proporcionais do tempo) constituem uma progressão geométrica cuja razão é o quociente da razão dos tempos pela razão das velocidades. Ou, na linguagem das teorias clássicas das proporções, estes diversos espaços são continuamente proporcionais e estão na razão pela qual a razão dos tempos excede a razão das velocidades. No enunciado da sétima conclusão, Tomás passa directamente para a razão do espaço percorrido na hora toda para o espaço percorrido na primeira parte proporcional do tempo.

Sétima conclusão. Partida a hora em partes proporcionais na proporção que quiseres, movendo-se o móvel continuamente mais depressa na parte seguinte do que na parte precedente (mais depressa, não obstante, numa proporção menor do que a proporção da divisão [da hora]); o espaço percorrido na hora toda estará para o espaço percorrido na primeira parte proporcional do tempo na proporção em que qualquer todo dividido segundo a proporção pela qual a proporção maior do tempo excede a proporção das velocidades está em ordem à primeira parte proporcional. (Tomás 1509, fl. *q* 2^v^)

Pelo contrário, se as velocidades também forem diminuindo segundo uma proporção contínua, então os espaços (percorridos durante as diferentes partes proporcionais do tempo) constituem uma progressão geométrica cuja razão é o produto das razões dos tempos e das velocidades. Numa linguagem mais próxima da de Tomás, estes espaços são continuamente proporcionais e estão na razão composta das razões dos tempos e das velocidades.

Oitava conclusão. Partida a hora em partes proporcionais em qualquer proporção que queiras, mova-se o móvel continuamente mais depressa, em certa proporção, na parte precedente, maior, do que na imediatamente seguinte, menor; o espaço percorrido na hora toda estará para o espaço percorrido na primeira parte

[10] Na terminologia euclidiana há distinção nítida entre *número*, *grandeza* e *razão*; esta distinção foi-se esbatendo, sobretudo nos últimos séculos da Idade Média e no Renascimento, assistindo-se a um progressivo alargamento do conceito de *número*, que acabaria por englobar os dois restantes a partir do século XIX. No contexto da matemática grega, a *composição* e a *separação* são operações sobre *razões* teorizadas no livro V dos *Elementos* de Euclides (cujo conteúdo é atribuído a Eudoxo de Cnido) e recebem aí uma terminologia aditiva que se mantém no tratado de Nicómaco. Contudo, na passagem ao conceito mais generalizado de *número real positivo*, elas correspondem à *multiplicação* e à *divisão* dos números representativos dessas razões (isto é, dos números reais que estão nessas razões para o número 1).

proporcional na proporção em que está qualquer todo, dividido em partes proporcionais segundo a proporção composta da proporção dos tempos, a saber, da parte proporcional maior para a parte imediatamente seguinte, menor, e [da proporção] da velocidade da parte maior para a velocidade da parte menor, para a primeira parte de tal divisão. (Tomás 1509, fl. *q* 3ʳ)

Tomás considera que a 7ª e a 8ª conclusões têm enunciados pesados, cuja compreensão pode ser facilitada pela apresentação de exemplos:

Este teorema, de enunciado longo e enredado, pede uma clarificação em termos conhecidos e com exemplos. Quero portanto dar um exemplo adequado. (Tomás 1509, fl. *q* 2ᵛ)

e

Explique-se este obscuro teorema através da apresentação de exemplos. (Tomás 1509, fl. *q* 3ʳ)

Os primeiros exemplos não são interessantes; são-no mais as duas frases citadas, pelo uso do termo *teorema* para designar resultados relativos a séries.

Tomás apresenta também uma formulação geral destes resultados. Designa, como anteriormente, por *g* a razão por que decrescem as partes do tempo, mas utiliza a letra *f* para designar agora a razão das velocidades (que crescem na 7ª conclusão e decrescem na 8ª).

Na 7ª conclusão chama *h* à razão obtida por *separação* entre *f* e *g*:

A conclusão também se prova geralmente; seja a hora dividida em partes proporcionais na proporção *g*, a maior, e haja continuamente da velocidade da parte menor para a velocidade da parte maior imediatamente precedente a proporção *f*, menor do que a proporção *g*; e a proporção *g* exceda a proporção *f* mediante a proporção *h*. Então o teorema diz que o espaço percorrido na hora toda está para o espaço percorrido na primeira parte proporcional dessa hora na proporção em que algo dividido segundo a proporção *h* está para a primeira parte proporcional dessa mesma proporção *h*. (Tomás 1509, fl. *q* 2ᵛ)

Na 8ª conclusão, pelo contrário, *h* designa a *composta* de *f* e *g*:

A conclusão também se prova universalmente; seja a hora dividida em partes proporcionais segundo a proporção *g* e mova-se o móvel na parte precedente [do tempo], a maior, continuamente numa certa proporção qualquer mais depressa do que na menor seguinte, de modo que a velocidade seja continuamente maior na parte maior do que na menor imediatamente seguinte, e seja *f* a proporção contínua da velocidade da parte maior para a velocidade da parte menor; e a proporção composta de *g* e *f* seja *h*; então o espaço percorrido na hora toda está para o espaço percorrido na primeira parte proporcional [da hora] na proporção em que qualquer todo dividido em partes proporcionais segundo a proporção *h* está para a primeira parte proporcional da mesma divisão. (Tomás 1509, fl. *q* 3ʳ)

Portanto, na 7ª conclusão, $h = \frac{g}{f}$, o que, como é óbvio, pressupõe $f < g$. Na 8ª conclusão, $h = g \cdot f$. Esta escolha de notação não é muito feliz, uma vez que a letra *f* designava, nas conclusões precedentes, a razão do todo para a sua primeira parte proporcional; a razão *f* é aqui inteiramente independente da razão *g* (exceptua-se apenas a restrição $f < g$ na 7ª conclusão), enquanto que nas 2ª e 4ª conclusões as duas razões estavam ligadas pela relação funcional que obriga a soma dos inversos de *f* e *g* a valer 1.

A propósito dum exemplo da 7ª conclusão, pode ler-se

(…) as partes proporcionais do tempo estão continuamente em proporção supratriparciente quartas; e a velocidade das partes consecutivas estão em proporção sesquiáltera (…); e a proporção supratriparciente quartas excede a proporção sesquiáltera (…) pela proporção sesquisexta, como se prova nestes termos .7.6.4. (…) (Tomás 1509, fl. *q* 3ʳ)

Representem-se por t_n a *n*-ésima parte proporcional do tempo (dividido segundo a razão *g*), por v_n a velocidade do movimento durante a parte t_n do tempo, e por e_n o espaço percorrido durante esse mesmo tempo t_n. O que temos neste exemplo são os dados $\frac{t_n}{t_{n+1}} = 1 + \frac{3}{4}$ e $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{1}{2}$, de onde não seria difícil tirar $\frac{e_n}{e_{n+1}} = \frac{1+\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{6}$.

Mas Tomás utiliza uma aritmética das razões e das proporções que impõe uma prática diferente. Por um lado, as operações sobre razões eram concebidas aditivamente, e não multiplicativamente (sendo aliás a terminologia aditiva das teorias das proporções, quer da de Eudoxo-Euclides, quer da de Nicómaco, um reflexo disso mesmo). Por outro lado, Tomás não tinha ainda à disposição a simbologia aritmético-algébrica que haveria de ser desenvolvida ao longo do século XVI e na primeira metade do século XVII.

O procedimento de Tomás é o de exprimir ambas as razões dadas, a dos tempos e a das velocidades[11], por dois pares de números em que o segundo termo seja o mesmo[12]. Consegue--o facilmente com o número 4; com efeito, $\frac{t_n}{t_{n+1}} = \frac{7}{4}$ e $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{6}{4}$, pelo que a razão procurada é a de 7 para 6. Portanto, é essa a razão, h, dos espaços. Como $\frac{1}{7} + \frac{1}{h} = \frac{1}{1}$, o espaço percorrido durante o tempo total será sete vezes maior do que o espaço percorrido na primeira parte proporcional do tempo.

Os exemplos da 8ª conclusão referem-se à composição de razões e são menos interessantes. Vejamos um deles.

A 9ª conclusão é a mais extensa das doze que constituem o terceiro capítulo da segunda parte do *Liber de triplici Motu*: ocupa cerca de quatro colunas (o que equivale a duas páginas). É uma variação das três anteriores, à maneira de *De Configurationibus* III, 10, de Oresme: se as velocidades forem aumentando em certa razão nas partes de ordem ímpar da hora e forem aumentando segundo outra razão nas partes de ordem par da hora, basta que uma destas razões seja maior do que a razão dos tempos, ou que lhe seja igual, para que o espaço percorrido seja infinito; se ambas as razões das velocidades forem menores do que a razão dos tempos, então aplica-se a sétima conclusão às partes de ordem ímpar e às partes de ordem par.

Como corolário, segue-se exactamente o exemplo de *De Configurationibus* III, 10, embora exposto de forma inteiramente retórica, sem recurso ao elucidativo diagrama de Oresme. Será porventura mais interessante analisar aqui o 2º corolário.

Tomás considera uma hora dividida em partes continuamente proporcionais segundo a razão quádrupla e um móvel que se desloque com movimento uniforme nas partes de ordem ímpar da hora e com movimento uniformemente diforme nas partes de ordem par da hora, de tal modo que nas sucessivas partes de ordem ímpar a velocidade vá triplicando, enquanto que em cada parte de ordem par a velocidade aumente desde a velocidade da parte imediatamente anterior até à velocidade da parte imediatamente seguinte. Afirma que então o espaço percorrido na hora toda está para o espaço percorrido na primeira parte da hora na razão supraundécimaparciente décimas-terceiras.

---

[11] Há que ver sempre se se trata da razão duma velocidade para a seguinte, ou da razão duma velocidade para a anterior. Tomás considera sempre a razão da maior grandeza para a menor, quer se trate de tempos, de espaços ou de velocidades.

[12] Como é óbvio, poderia atingir o mesmo objectivo se as exprimisse por dois pares de números em que o primeiro termo fosse o mesmo.

Mantenhamos as notações anteriormente introduzidas e designemos ainda o espaço percorrido na hora toda, o espaço percorrido nas partes de ordem ímpar da hora e o espaço percorrido nas partes de ordem par da hora por E, E_i e E_p, respectivamente. Este 2º corolário da 9ª conclusão afirma que se $g = 4$, se $v_{2n+1} = 3v_{2n-1}$ e se no tempo de ordem $2n$ a velocidade aumentar uniformemente de v_{2n-1} a v_{2n+1}, então $\frac{E}{e_1} = 1 + \frac{11}{13}$.

Tomás supõe, muito convenientemente, que o móvel percorre 13 *pés* na primeira parte proporcional da hora. Não sendo essencial, a escolha deste valor numérico facilita consideravelmente os cálculos.

Comecemos por calcular o espaço E_i, percorrido nas partes de ordem ímpar da hora. Uma vez que $\frac{t_{2n-1}}{t_{2n+1}} = 16$ (por ser $g = 4$) e que $\frac{v_{2n+1}}{v_{2n-1}} = 3$, conclui-se que $\frac{e_{2n-1}}{e_{2n+1}} = \frac{16}{3}$; e, como $\frac{13}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{1}$, vem que $\frac{E_i}{e_1} = \frac{16}{13}$. Como $e_1 = 13\,\textit{pés}$, ficamos a saber que $E_i = 16\,\textit{pés}$.

O cálculo do espaço E_p, percorrido nas partes de ordem par da hora, é inteiramente semelhante, sendo apenas preciso reduzir os vários movimentos uniformemente acelerados a movimentos uniformes. O 2º corolário da 9ª conclusão não contém nenhuma referência explícita ao Teorema de Merton; contudo, como seria de esperar, este resultado está implicitamente presente, logo no começo da argumentação de Tomás, quando este refere que a média entre uma quantidade e o seu triplo é o dobro da quantidade:

> Prova-se supondo que o meio entre o triplo e o subtriplo é duplo do subtriplo, como o meio entre um e .3. é .2., que é duplo de um. Supõe-se em segundo lugar que as velocidades de partes ímpares consecutivas estão continuamente na proporção tripla, e também as de partes pares, como é patente pelo caso do corolário em consideração. (Tomás 1509, fl. *q* 4ʳ)

Designe-se então por v_{2n} a *velocidade média* no tempo de ordem $2n$. Sabemos, pelo Teorema de Merton, que o espaço percorrido pelo móvel nesse tempo e nas condições do enunciado do corolário é o mesmo que seria percorrido pelo móvel no mesmo tempo mas com movimento uniforme com velocidade igual a v_{2n}. E a passagem acima citada afirma que, por um lado, $v_2 = 2v_1$ e que, por outro, tal como acontece nas partes de ordem ímpar, também $v_{2n+2} = 3v_{2n}$.

Ora, de $t_1 = 4t_2$ e de $v_2 = 2v_1$, conclui-se que $e_1 = 2e_2$, ou seja, que $e_2 = 6\frac{1}{2}\,\textit{pés}$. E de $\frac{t_{2n}}{t_{2n+2}} = 16$ e $\frac{v_{2n+2}}{v_{2n}} = 3$ deduz-se que $\frac{e_{2n}}{e_{2n+2}} = \frac{16}{3}$. Logo, $\frac{E_p}{e_2} = \frac{16}{13}$. Assim, conclui-se que $E_p = 8\,\textit{pés}$ e, portanto, que $E = 24\,\textit{pés}$.

É claro que também é possível considerar uma série geométrica composta por mais do que duas séries geométricas. O caso apresentado por Tomás pode ser resumido nas cinco fórmulas seguintes:

$$\frac{v_{5n+1}}{v_{5n-4}} = 1 + \frac{1}{2}, \quad \frac{v_{5n+2}}{v_{5n-3}} = 1 + \frac{1}{3}, \quad \frac{v_{5n+3}}{v_{5n-2}} = 1 + \frac{1}{4}, \quad \frac{v_{5n+4}}{v_{5n-1}} = 1 + \frac{1}{5}, \quad \frac{v_{5n+5}}{v_{5n}} = 1 + \frac{1}{6}.$$

Como é óbvio, a formulação de Tomás é completamente retórica e, portanto, mais enredada:

> Além disto, partida a hora em partes proporcionais numa proporção múltipla, e estando as velocidades de quaisquer duas partes distantes por .4. partes proporcionais em qualquer proporção supraparticular ou supraparciente, de modo que as primeiras distantes por .4. partes proporcionais, como a primeira e a sexta

estejam em velocidade na proporção sesquiáltera, e a velocidade da sétima para a velocidade da segunda na proporção sesquiterça, e a velocidade da oitava para a velocidade da terceira na proporção sesquiquarta, e a velocidade da nona para a velocidade da quarta na proporção sesquiquinta, e a velocidade da décima para a velocidade da quinta na proporção sesquisexta, e a velocidade da décima-primeira para a velocidade da sexta na proporção sesquiáltera, e assim de novo ascendendo até à proporção sesquisexta, e depois voltando à proporção sesquiáltera, e assim sucessivamente, de modo que todas as distantes por .4. começando na primeira estão na proporção sesquiáltera em velocidade, e começando na segunda na [proporção] sesquiterça, e na terceira na sesquiquarta, e na quarta na sesquiquinta, e na quinta na sesquisexta, e não mais. (Tomás 1509, fl. *q* 4^v)

10ª conclusão

A décima conclusão consiste apenas de exemplos. Correspondem todos a séries do mesmo tipo, que (Wieleitner 1913-14, pág. 161) representa por

$$1+\left(c+\frac{a}{b}\right)x+\left(c+\frac{a}{b\lambda}\right)x^2+\left(c+\frac{a}{b\lambda^2}\right)x^3+\cdots,$$

mas não vêm precedidos por nenhum enunciado de carácter geral.

Estes exemplos são interessantes, porque a ideia da demonstração é análoga à das 2ª e 4ª conclusões. Tomás analisa pormenorizadamente três casos, sempre com a hora dividida na razão dupla, e com as velocidades em cada parte proporcional da hora novamente definidas em relação à velocidade na primeira parte.

Vejamos o primeiro exemplo[13]:

Dividida a hora em partes proporcionais segundo a proporção dupla, mova-se algum móvel na primeira parte proporcional com alguma velocidade, e na segunda com velocidade sesquialteramente maior, e na terceira com velocidade sesquiquartamente maior do que na primeira, [e na quarta com velocidade sesquioitavamente maior do que na primeira,] e na quinta com [velocidade] sesquidecimasextamente maior do que na primeira, e assim sucessivamente, ascendendo por espécies de proporção supraparticular denominadas por números parmente pares [isto é, potências de base 2] (melhor dizendo, descendendo, porque as proporções supraparticulares são tanto menores quanto maior for o número por que se denominam, isto é, quanto maior for o número por que se designa a parte aliquota); o espaço percorrido na hora toda está para o espaço percorrido na primeira parte proporcional na proporção dupla sesquiterça. (Tomás 1509, fl. *q* 4^v)

Ou seja, Tomás afirma que, se $\frac{t_n}{t_{n+1}}=g=2$ e $\frac{v_{n+1}}{v_1}=1+\frac{1}{2^n}$, então $\frac{E}{e_1}=2+\frac{1}{3}$.

Proponho que sigamos pormenorizada e extensivamente a resolução deste caso, que é típica da argumentação demonstrativa de Tomás. Os cálculos vão sendo apresentados numa sucessão de silogismos, de que uma das premissas só é provada no silogismo seguinte.

A argumentação começa por supor que a velocidade na primeira parte proporcional da hora (que, neste caso, é exactamente meia hora) é tal que, durante esse período de tempo, o móvel percorre 2 pés. Este valor é inteiramente irrelevante. Mas há algum cuidado a ter, na leitura do texto, com os sistemas de unidades utilizados para medir as grandezas envolvidas.

Prova-se assim; seja, por exemplo, a velocidade da primeira parte proporcional como dois e que mediante essa velocidade algum móvel percorra dois pés na primeira parte proporcional [da hora]; (Tomás 1509, fl. *q* 4^v)

Portanto, apesar de os espaços serem medido em *pés* e de os tempos serem medidos em *horas*, as velocidades não são medidas em *pés por hora*.

Tomás prosegue:

[13] Nesta passagem, Tomás utiliza a expressão *números parmente pares* para designar *números que são potências da base* 2, e não para designar *números que são dobro de números pares* (como é o caso na tradição dos livros VII, VIII e IX dos *Elementos* de Euclides).

E argumenta-se assim; estenda-se essa velocidade como dois a toda a hora, porque em qualquer parte proporcional da hora a velocidade é maior do que dois, como se tem pelo caso; e toda a hora é dupla da sua primeira parte proporcional, na qual o móvel percorre dois pés mediante uma velocidade como dois; portanto, mediante essa velocidade coextensa a toda a hora, percorre quatro pés, e, mediante os excessos das partes proporcionais sobre essa velocidade como dois, percorre dois terços de pé, que fazem um terço de dois pés; portanto, o espaço todo estará para o espaço percorrido na primeira parte proporcional na proporção dupla sesquiterça, cujo valor é a proporção dos mesmos quatro com dois terços (…) para dois. (Tomás 1509, fl. *q* 4[v])

Resta ainda provar que os vários excedentes de velocidade na segunda meia hora, relativamente à velocidade com 2 graus de intensidade da primeira meia hora, fazem o móvel percorrer duas terças partes de pé. Os vários espaços percorridos nas partes proporcionais da hora constituem uma progressão geométrica; para calcular a sua razão, há que começar por comparar aqueles excedentes das sucessivas velocidades relativamente à primeira.

Provo também que, mediante esses excessos, percorre dois terços de pé; porque, como a velocidade da segunda parte proporcional é sesquiáltera da velocidade da primeira, que é como dois, segue-se que o excesso da velocidade da segunda sobre a velocidade da primeira é um grau, e, porque a terceira [velocidade] excede a primeira na proporção sesquiquarta, segue-se que o seu excesso é metade dum grau, uma vez que de dois e meio para dois há a proprção sesquiquarta; e a velocidade da quarta está para a velocidade da primeira na proporção sesquioitava; portanto, o seu excesso é um quarto; portanto, nesse caso, do excesso da segunda para o excesso da terceira há a proporção dupla e do excesso da terceira para o excesso da quarta [há] analogamente a proporção dupla, e assim sucessivamente encontrarás que esses excessos estão [continuamente] em proporção subdupla. (Tomás 1509, fl. *q* 4[v])

Ou seja, da relação inicial $\frac{v_{n+1}}{v_1} = 1 + \frac{1}{2^n}$ e da escolha (arbitrária) de que $v_1 = 2$, tira-se que $v_{n+1} - v_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$, donde se conclui que $\frac{v_{n+2} - v_1}{v_{n+1} - v_1} = \frac{1}{2}$.

Encontrarás que esses excessos estão [continuamente] em proporção subdupla e se estendem a partes que estão entre si continuamente em proporção subdupla; portanto, os espaços percorridos mediante essas velocidades estão entre si em proporção subquádrupla e, por consequência, o agregado de todos eles estará para o primeiro deles na proporção sesquiterça; e o primeiro deles é meio pé; logo, o todo será meio pé e um sexto de pé e, por consequência, dois terços de pé, que é o que havia a provar. (Tomás 1509, fl. *q* 4[v])

A conclusão deste silogismo depende de valer *meio pé* o espaço percorrido na segunda parte proporcional da hora em virtude do excedente de velocidade $v_2 - v_1$. Ora, na primeira parte do tempo o móvel animado da velocidade v_1 (que tem 2 graus de intensidade) percorre 2 *pés*; logo, animado do excedente de velocidade $v_2 - v_1$ (que tem 1 grau de intensidade) o móvel percorreria 1 *pé* no mesmo tempo; portanto, na segunda parte do tempo (que é metade da primeira) o móvel animado dessa mesma velocidade $v_2 - v_1$ percorrerá *meio pé*:

Mas provo também que o primeiro deles é meio pé; uma vez que o primeiro deles é percorrido mediante o excesso da [velocidade da] segunda parte proporcional sobre a [velocidade da] primeira, excesso que é um grau, mediante o qual na primeira parte proporcional se percorre um pé; portanto, mediante ele, na segunda parte proporcional, subdupla daquela, percorre-se meio pé, que é o que havia a provar. (Tomás 1509, fl. *q* 4[v])

11ª conclusão

Na 11ª conclusão, a hora está dividida numa razão qualquer, *g*, e a velocidade em cada parte proporcional da hora (excepto, obviamente, a primeira) está para a velocidade na parte imediatamente anterior na razão supraparticular indexada por essa parte, isto é, a velocidade na parte de ordem *n* está para a velocidade na parte de ordem $n-1$ na razão supraparticular $1 + \frac{1}{n}$. O cálculo do espaço percorrido no tempo total, ou melhor, da razão entre o espaço percorrido na hora toda e o espaço percorrido na primeira parte proporcional da hora, depende da razão g; Tomás não consegue exprimir com generalidade a forma dessa dependência, por falta duma notação simbólica adequada, mas a dificuldade desaparece perante particularizações da razão g. Embora as velocidades em cada parte proporcional da hora voltem a ser definidas em relação às velocidades das partes imediatamente precedentes, Tomás consegue, por uma escolha hábil do grau de velocidade na primeira parte da hora, reduzir este caso ao que foi estudado nas 2ª e 4ª conclusões: para cada $n \geq 2$, $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot v_{n-1}$ e, portanto, se se escolher $v_1 = 2$, vem $v_n = n+1$.

12ª conclusão e contexto da obra

Tal como acontece com a 10ª, também a 12ª e última conclusão do terceiro capítulo do *Liber de triplici Motu* consiste apenas de exemplos desacompanhados de qualquer formulação de carácter geral. Além disso, os argumentos que Tomás aqui apresenta não conduzem ao cálculo exacto de somas de séries, mas sim apenas à indicação dum intervalo onde essas somas se situam. Vejamos apenas o primeiro exemplo.

Se algum tempo for dividido em partes proporcionais segundo a proporção dupla, e na primeira parte proporcional um móvel se mover com uma velocidade qualquer, e na segunda duplamente mais depressa do que na primeira, e na terceira sesquialteramente mais depressa do que na primeira, e na quarta sesquiterçamente mais depressa do que na primeira, e assim sucessivamente, procedendo por todas as espécies de proporção supraparticular, o espaço percorrido no tempo todo é mais do que o dobro do espaço percorrido na primeira parte proporcional [do tempo] e menos do que o quádruplo. (Tomás 1509, fls. q 5^v, q 6^r)

Podemos traduzir este resultado pela dupla desigualdade

$$2 < 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots < 4$$

A primeira desigualdade é uma consequência trivial de

$$1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 1 \cdot \frac{1}{2^3} + 1 \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots < 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + \cdots .$$

Prova-se a primeira parte; porque, dividida assim a hora em partes proporcionais segundo a proporção dupla e movendo-se o móvel sempre uniformemente com o movimento com que se move na primeira parte proporcional, o espaço percorrido exactamente na hora toda é exactamente duplo do espaço percorrido na primeira parte proporcional, como é patente por si mesmo; mas o móvel move-se mais depressa do que nesse caso, visto que em qualquer parte proporconal [do tempo] exceptuada a primeira se move mais depressa do que nesse caso e na primeira [se move] tão depressa como nesse caso; portanto, percorre mais do que o espaço duplo do espaço percorrido na primeira parte proporcional. (Tomás 1509, fl. q 6^r)

Na demonstração da segunda desigualdade, Tomás invoca a 4ª conclusão:

Prova-se a segunda parte; porque, se esse móvel se mover na primeira parte proporcional com alguma velocidade, e na segunda duplamente [mais depressa], e na terceira triplamente mais depressa do que na primeira, e assim sucessivamente, como se põe no caso da quarta conclusão, então percorre o espaço quádruplo do espaço percorrido na primeira parte proporcional, como é patente da quarta conclusão; mas do modo [suposto] move-se na hora toda mais lentamente do que nesse caso em todas as partes proporcionais exceptuadas a primeira e a segunda, e na primeira e na segunda [move-se] tão depressa como nesse caso; portanto, do modo [suposto] percorre menos espaço do que nesse caso na hora toda; e nesse caso percorre o quádruplo do espaço percorrido na primeira parte proporcional; portanto deste modo [percorre] menos do que o quádruplo, que é o que havia a provar. E assim é patente a conclusão. (Tomás 1509, fl. q 6^r)

Trata-se, portanto, duma consequência de

$$1+\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots<1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+5\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots.$$

É significativo que, para a última das conclusões deste capítulo, Tomás escolha casos que estavam para além das suas possibilidades, bem como para além das da ciência do seu tempo. (Sylla 1989) chama a atenção para o contexto de intenso estudo de Lógica em geral, e de treino na resolução de sofismas em particular, existente na Universidade de Paris nos finais do século XV e nos começos do século XVI. Segundo esta historiadora, o *De triplici Motu* é um testemunho desse ambiente parisiense na época em que foi escrito.

Uma das feições interessantes, por serem hoje pouco comuns nas instituições de ensino superior, de que se revestia esse ambiente de disputa lógica era o facto de a refutação dos sofismas ser feita apenas oralmente. Uma passagem do *De triplici Motu*, logo a seguir à 12ª conclusão, é bem sugestiva. Adverte-se nela para a eventualidade de ser necessário enfrentar um contendor particularmente difícil, implacável, que coloque uma questão para a qual (tal como acontece com as da 12ª conclusão) não se conheça uma resposta exacta. Tomás dá então dois conselhos ao leitor; o segundo pode ser descrito como o de *responder na mesma moeda*; mas o primeiro é revelador:

> Primeiro: para o ridicularizar, tome-se o argumento dele como se fosse inútil e inteligível e peça-se pena e tinteiro para, mediante multiplicações e restantes algorismos, se calcular quanto valha a intensidade da velocidade no caso por ele posto. (Tomás 1509, fl. *q* 6ᵛ)

Tomás está, portanto, a trabalhar num ambiente intelectual em que se considera ridículo o simples facto de pedir material de escrita para resolver uma questão como as que temos vindo a analisar. Todos estes casos de redução dum movimento diformemente diforme a um movimento uniforme e de cálculo da razão entre o espaço percorrido no tempo total e o espaço percorrido na primeira parte do tempo deveriam ser resolvidos oralmente e sem qualquer tipo de suporte visual. Como diz E. Sylla,

> (…) é claro que o trabalho de Alvarus [Tomás] era para ser lido em ligação com as disputas em que se tentava derrotar o opositor, e não apenas descobrir a verdade. (Sylla 1989, pág. 266)

Referências bibliográficas

CAROTI S. (Editor) 1989. *Studies in Medieval Natural Puilosophy*, Leo S. Olschki, Firenze.

CLAGETT M. 1959, *The Science of Mechanics in the Middle Ages*, The University of Wisconsin Press, Madison.

CLAGETT M. (Editor) 1968. *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*, The University of Wisconsin Press, Madison.

HUTCHINS R. M. (Editor) 1952. *Great Books of the Western World*, vol. 11, William Benton Publisher, Chicago.

LEITÃO H. 2000. "Notes on the life and work of Álvaro Tomás", *Boletim CIM—nternational Center for Mathematics* **9**, págs. 10-15.

NICOMACHUS OF GERASA 1952. *Introduction to Arithmetic*, trad. de Martin L. D'Ooge, em (HUTCHINS 1952, págs. 806-848).

ORESME N. 1968. *Tractatus de Configurationibus Qualitatum et Motuum*, em (CLAGETT 1968, págs. 157-435).

SYLLA E. D. 1989. “Alvarus Thomas and the role of Logic and Calculations in sixteenth century Natural Philosophy”, em (CAROTI 1989, págs. 257-298).

TOMÁS Á. 1509. *Liber de triplici motu proportionibus annexis magistri Alvari Thome Ulixboñ philosophicas Suiseth calculatões ex parte declarãs*, Paris, Ponset le Preux (Exemplar da Biblioteca Nacional, Lisboa).

H. WIELEITNER 1914, “Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter”, *Bibliotheca Mathematica* **14**, págs. 150-168.