

Zur Geschichte der unendlichen Reihen im christlichen Mittelalter.

Von H. WIELEITNER in Pirmasens.

I. Einleitung. Auf S. 393 des dritten Bandes seiner *Études sur LÉONARD DE VINCI* (Paris 1913) teilt P. DUHÉM mit, ohne übrigens das Verfahren anzudeuten, daß NICOLE ORESME († 1382) in einem Werke mit dem Titel *De difformitate qualitatum*, das nur handschriftlich überliefert wurde¹⁾, eine Reihe richtig summierte, die man in die algebraische Form bringen kann:

$$(1) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \dots \text{ in inf.}$$

Da ich über das Vorkommen solcher (rekurrenter) Reihen vor JAKOB BERNOULLI²⁾ nirgends Belege finden konnte, fragte ich bei Herrn ENESTRÖM an, ob über die Summierung ähnlicher Reihen im Mittelalter etwas bekannt sei. Unter Verneinung dieser Frage wies Herr ENESTRÖM zugleich auf eine andere Stelle (S. 540/41) in dem zitierten Band von DUHÉMS Werk hin, wo angegeben wird, daß bei einem anderen Scholastiker namens ALVARUS THOMAS in einem 1509 gedruckten Werke *Liber de triplici motu* eine Reihe betrachtet werde, deren Summe sich, wie Herr ENESTRÖM hinzufügte, leicht vermittle des natürlichen Logarithmus von 2 ausdrücken lasse, die aber THOMAS immerhin zwischen zwei nicht zu weite Grenzen eingeschlossen habe. Herr ENESTRÖM regte zugleich an, ich sollte nachsehen, ob der Traktat des THOMAS in München vorhanden sei, um die immerhin überraschende Aufstellung DUHÉMS zu verifizieren. Die Münchner Hof- und Staatsbibliothek besitzt tatsächlich ein Exemplar dieses Werkes, das von später Hand als „liber rarissimus“ auf dem Titelblatte bezeichnet ist.³⁾

1) Dieses Werk bildete die Grundlage für eine verkürzte Bearbeitung, die später unter dem Titel *Tractatus de latitudinibus formarum* weite Verbreitung fand. Vgl. meinen Artikel in *Bibliotheca Mathematica* 13., 1912/13, S. 115—145, sowie eine in derselben Zeitschrift demnächst erscheinende zweite Abhandlung.

2) *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis* I, Basileae 1689, prop. XIV; *Opera* 1, Genevae 1744, S. 384—385.

3) Ganz vor kurzem hat die Königl. Bibliothek in Berlin ein Exemplar erworben auf Veranlassung von Herrn G. VALENTIN, dem ich von der Sache kurze Mitteilung gemacht hatte.

Als ich die Stelle aufgeschlagen und mich etwas hineingelesen hatte, erkannte ich bald, daß nicht bloß DUHÉMS Angabe vollkommen richtig war, sondern daß ich hier eine systematische Darstellung der Verwendung unendlicher Reihen vor mir hatte. Ich glaube, dieser Gegenstand ist interessant genug, um weiteren Kreisen bekannt gemacht zu werden.

2. Bibliographisches. Da das Werk von THOMAS eine so große Seltenheit zu sein scheint, darf ich wohl von ihm ein paar Worte mehr, als sonst gerechtfertigt wäre, sagen, obwohl es nicht zu den Inkunabeln gehört. Das Format ist ein kleines Folio (Satzspiegel ohne Kolummentitel 18,8 cm × 21,3 cm). Die Bogen sind in der Regel zu Ternionen vereinigt (es kommen mehrfach auch Doppelbogen vor) und dann mit k. 1., k. 2., k. 3. beispielsweise, später mittels Versalien signiert. Kustoden sind nicht angewandt. Das ganze Werk hat 152 Blätter⁴⁾ und ist zweispaltig, in Gotisch (etwas hohes Petit mit großem Bild) kompreß gedruckt, mit mäßiger Verwendung von Abbriviaturen. Im Anfang auf mehreren Blättern, am Schluß auf dem letzten Blatt ist für Überschriften auch Rot benützt.

Das erste Blatt ist das Titelblatt. Es zeigt auf der Vorderseite einen sehr gut ausgeführten Holzschnitt⁵⁾, Maria auf einem Thron mit dem Jesusknaben im Schoß, der ein übermäßig großes T-förmiges Kreuz hält, das von einem Engel gestützt wird. Ein anderer Engel krönt Maria. Im Vordergrund links lagert ein Einhorn mit einem Wappen auf der Brust, rechts kniet ein Mann (der Drucker). Ein Spruchband über ihm enthält die Worte: „memento mei, O mater dei“⁶⁾, ein anderes unter ihm seinen Namen: „Guilke anabat“. Unter diesem rechteckigen Bild ist ein Feld, in das mit Rot der Titel des Werkes gedruckt ist:

*Liber de triplici motu proportionibus annexis || magistri Aluari
Thome. Ulixbonensis philosophi || cas. Suiseth calculationes ex parte
declarans.*⁷⁾

Das Ganze ist umrahmt von einer aus 5 Stöcken zusammengesetzten Renaissanceleiste.⁸⁾ Die zweite Seite enthält eine Widmung von ALVARUS

1) Beim Münchner Exemplar hat eine frühe Hand auf die letzte Seite fälschlich geschrieben „folia 142“. Auch hat dieses Exemplar jemand, ebenfalls ziemlich früh, mit den Ziffern 1—300 paginiert, wobei das Titelblatt und das letzte Blatt nicht mitgezählt sind. DUHÉM gibt 162 Blätter an. Das ist wohl auch ein Zählfehler.

2) Ich weise darauf hin, daß die Dünzschschen Meisterholzschnitte etwa um dieselbe Zeit erschienen (Apokalypse 1498, Marienleben 1511).

3) Natürlich sind sowohl hier wie auch im Titel und sonst Abbriviaturen verwendet, die ich alle ausschreibe.

4) Das von DUHÉM benützte Exemplar hat hier noch eine Bemerkung über den Verlag des Buches.

5) Das Münchner Exemplar trägt auf dem Titelblatt noch die mit Tinte sehr früh geschriebenen Worte: „Collegij Paris. Soc. JESV.“, sowie den etwas später, aber

THOMAS AN PETRUS DE MENESES, der, wie man dem Text entnehmen kann, einmal zu Athen Magister war, außerdem zwei Gedichte, eines von JOANNES DE HAXA¹⁾ an HERMANNUS LETHEMATE (sic) DE GOUDA germane nationis procuratori, das andere von DIONYSIUS FABER vindocinensis an den Leser gerichtet. Das Kolophon steht auf Bl. (E. 4.)^r, Sp. 2 und lautet:

¶ Explicit liber de triplici motu compositus per Magistrum Aluarum Thomam vlixbonensem Regentem Parrhisius in Collegio Coquereti. Anno domini. 1509. Die Februarii. 11.

Auf der Rückseite dieses Blattes sind Druckfehler vermerkt. Ferner ist u. a. dort noch ein Gedicht von JOHANNES DE HAYA an jenen HERMANNUS LETHEMATE (sic) DE GOUDA, auf der Vorderseite des Blattes (E. 5) Schreiben von GEOGIUS BRUNIAU vindocinensis an ALVARUS THOMAS und von JOANNES DE HAYA an denselben HERMANNUS LETHEMATE (sic) DE GOUDA (sic) und ein Gedicht auf den Drucker Anabat. Die Rückseite des Blattes (E. 5) enthält einen ebenso großen Holzschnitt wie das Titelblatt, darstellend den Jesusknaben im Tempel, darunter in Rot das Impressum, welches lautet:

Impressum parisius per Guillelmum Anabat || commorentem (sic) apud paruum pontem ante hospitium dei || ad intersignium licornie.²⁾ Omnia pro meliori.

Die Umräumung ist aus denselben 5 Stöcken in etwas anderer Weise gebildet wie beim Titelblatt. Das letzte Blatt des Buches ist leer.

Über ALVARUS THOMAS ist nichts bekannt, außer was sich aus dem Kolophon ergibt; daß er also ein Portugiese war, aus Lissabon gebürtig und im Anfang des 16. Jahrhunderts „Regens“³⁾ des sonst ziemlich unbekanntes Kollegiums Coqueret in Paris.

3. Teilung einer Strecke in Abschnitte, die eine geometrische Reihe bilden. Ich habe nicht die Absicht, hier einen Bericht über den Inhalt des soeben beschriebenen Werkes zu geben, das sich ja durchaus in den Bahnen der scholastischen Naturphilosophie bewegt, sondern will nur das herauszusuchen trachten, was sich auf mein Thema bezieht. Das Werk beginnt, wie viele der scholastischen Traktate über den Aristotelischen Begriff des „motus“, mit einer Darstellung der Lehre von den Verhält-

gewiß noch im 17. Jahrhundert geschriebenen Spruch mit Unterschrift: „Vacatis et videtis Kenelme Digby“. Es ist sehr wahrscheinlich, daß DIONY (1603—1665; vgl. CANTORS Vorl. 2^e, Leipzig 1900, S. 786) das selbst geschrieben hat.

1) Wohl Druckfehler für HAYA, wie er später genannt wird.

2) Auch dieses Impressum ist bei dem von DUNKM benützten Exemplar am Schlusse anders und länger. Das Motto ist wieder dasselbe. Über das Berliner Exemplar will Herr VALENTIN selbst eine Notiz veröffentlichen.

3) Dieser Ausdruck ist noch heute in katholischen Priesterseminaren, auch in Deutschland, üblich.

nissen („proportiones“). Auch irrationale Verhältnisse werden in Betracht gezogen. Das einzige grundlegende Verhältnis ist aber das der Quadratdiagonale zur Seite („diametri ad costam“), aus dem die anderen durch Bildung der Differenz und rationale Teilung der Strecken hervorgehen. Das 5. Kapitel dieses ersten Teiles beginnt uns zu interessieren. Es hat die Überschrift (Bl. (a. 5.)^r, Sp. 1):

¶ Capitulum quintum in quo agitur de diuisione corporis in partes proportionales qua proportione rationali quis voluerit.

Wir finden da zuerst den Satz (3. suppositio): Wenn irgendwelche Zahlen stetig in einem geometrischen Verhältnis stehen, so stehen die Differenzen der aufeinander folgenden Zahlen in demselben Verhältnis. Als Beispiel sind angegeben die Zahlen 8, 4, 2, wo, wie wir schreiben, $8 : 4 = 4 : 2 = 2$ ist, und 2 sei eben auch das Verhältnis von $(8 - 4) : (4 - 2)$. Für den Beweis ist auf eine Stelle verwiesen, die ich nicht gleich finden konnte, aber auch nicht ernstlich suchte, da der Satz ja eine unmittelbare Folge des Satzes V:19 der *Elemente* EUKLIDS ist. Die 4. suppositio beginnt so:

Si aliquod corpus diuidatur in infinitas partes: et deperdendo primam illarum perdit aliquam proportionem puta a . hoc est efficitur in a . proportione minus: et perdendo secundam post primam iterum efficitur in a . minus: et perdendo tertiam post secundam iterum efficitur in a . minus. et sic consequenter ille partes sunt omnes partes proportionales illius corporis proportione a .

Wenn irgendein Körper in unendlich viele Teile geteilt wird und wenn er, sobald man den ersten der Teile von ihm wegnimmt, irgendein Verhältnis, z. B. a , verliert, d. h. in diesem Verhältnis a kleiner wird, und wenn er, sobald man den zweiten Teil wegnimmt, wieder im Verhältnis a kleiner wird, und bei Wegnahme des dritten Teiles auf dieselbe Weise usf., so sind jene Teile des Körpers alle „partes proportionales“ nach dem Verhältnis a .

Wenn ich als Körper eine Strecke AB zugrunde lege, so ist also angenommen, daß AB in den Punkten P_1, P_2, P_3 , etc. (vgl. Fig. 1) so geteilt ist, daß

$$AB : P_1B = a, \quad P_1B : P_2B = a, \quad \dots \quad P_iB : P_{i+1}B = a, \quad \dots \quad \text{in inf.}$$

und es ist behauptet, daß dann die Teilstrecken

$$AP_1, \quad P_1P_2, \quad P_2P_3, \quad \dots \quad P_iP_{i+1}, \quad \dots \quad \text{in inf.}$$

eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{a}$ bilden. Der Beweis ist bei THOMAS natürlich in scholastischer Form geführt und nimmt eine

ganze Spalte ein. Er stützt sich auf die vorhergehende, oben zitierte *suppositio*, aus der der Satz für uns ja ohne weiteres hervorgeht. Der Begriff der Teilung in „*partes proportionales*“ war offenbar gang und gäbe, da er nicht weiter erläutert ist.

Auf der Rückseite des Blattes erscheint dann sofort die 1. *conclusio* d. i. die Umkehrung des bewiesenen Satzes, nämlich: Wenn ein Körper [in der angegebenen Weise] nach irgendeinem Verhältnis geteilt wird, so steht der ganze Körper zu der Summe („*aggregatum*“) aller auf den ersten folgenden Teile in demselben Verhältnis. THOMAS wußte also, modern ausgedrückt, wenn

$$AP_1 : P_1 P_2 = P_1 P_2 : P_2 P_3 = \dots = P_i P_{i+1} : P_{i+1} P_{i+2} = \dots = a$$

gemacht und für den Augenblick $AB = 1$ gesetzt wird, daß dann $AP_1 = 1 - \frac{1}{a}$ ist.

Der Rest des 5. Kapitels dient auch nur dazu, diese Tatsache für die verschiedenen Arten der Verhältnisse unter Angabe spezieller Zahlenwerte näher auseinanderzusetzen, und im nächsten Kapitel wird noch erläutert, daß der Satz für die irrationalen Verhältnisse der angegebenen Art in derselben Weise gilt.

4. Reihen der Form $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ in inf.¹⁾ Die „*proportionales*“ umfassen im ganzen 53 Seiten.²⁾ Dann beginnt erst der eigentliche „*liber de triplici motu*“, der aus vier „*tractatus*“ besteht. Der erste „*tractatus*“ handelt „*de motu quo ad causam*“, der zweite „*de velocitate et tarditate motus penes effectum, exordiendo primo a motu locali tanquam a priori*“, der dritte „*de motu rarefactionis et condensationis*“ und der vierte „*de motu alterationis*“. Der zweite also bezieht sich auf die eigentliche Bewegung (den „*motus localis*“), und in ihm finden wir die Anwendung des mitgeteilten Satzes auf die Bewegungslehre.

Ich erwähne hier nur ganz flüchtig, daß der Satz: Die Wegstrecke, die ein Körper bei gleichförmig beschleunigter Bewegung („*motus uniformiter difformis*“) in einer gewissen Zeit zurücklegt, ist gleich der Wegstrecke, die in derselben Zeit ein gleichförmig („*uniformiter*“) sich bewegender Körper zurücklegt, dessen Geschwindigkeit gleich ist der halben Summe aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit des ersten Körpers, daß dieser Satz, den man bis vor kurzem für eine „Entdeckung“ GALILEI³⁾

1) x soll hier und im folgenden immer < 1 und positiv angenommen werden.

2) Es ist eine erst noch zu leistende Arbeit, die zahlreichen scholastischen Traktate über die Lehre von den Verhältnissen vergleichend zu untersuchen.

3) Diese Legende hat am gründlichsten DUNEM in dem eingangs zitierten Bande zorstört. Unabhängig davon hatte ich den Satz bei einem Kommentator des Oxford Scholastikers HENRICUS (lat. HENRICUS; lebte um 1330) gefunden, den DUNEM

hielt, von THOMAS natürlich in allen Varianten abgehandelt wird. Diese Dinge, wie alles folgende, stehen in dem 3. Kapitel des zweiten „*tractatus*“, dessen Überschrift lautet (Bl. o. 3.^v, Sp. 2):

¶ *Capitulum* tertium in quo ostenditur modus cognoscendi sine mensurandi motum uniformiter difformem et difformiter difformem quo ad tempus quo ad velocitatem et tarditatem in omni specie. etc.

So einfache Verhältnisse, wie sie bei der gleichförmigen Bewegung vorliegen, genügten aber den alles zergliedernden Scholastikern nicht. Sie teilten, wozu THOMAS auf Bl. (p. 4.)^v, Sp. 2 schematisch übergeht, die dem Bewegungsvorgang zugrunde liegende Zeit in „*partes proportionales*“, legten den einzelnen Zeitabschnitten gesetzmäßig fortschreitende verschiedene Geschwindigkeiten bei und suchten die zurückgelegte Wegstrecke zu berechnen. Es handelt sich dabei immer um dasselbe wie bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung, nämlich eine Geschwindigkeit zu finden, mit welcher ein gleichförmig sich bewegender Körper in der nämlichen Zeit dieselbe Wegstrecke zurücklegen würde. Zuvor wird aber des langen und breiten die Frage hin und her gewendet, ob es denn eine solche — wir würden sagen mittlere — Geschwindigkeit für jede Bewegung gebe. Nachdem THOMAS allerlei Gegenargumente rein formaler Art beigebracht hat, die zeigen wollen, daß dies nicht der Fall sein könne, sagt er schließlich (Bl. (o. 6.)^v, Sp. 2):

In oppositum tamen est vniuersalis opinio communiter philosophantium que in hac parte multum vigoris ac roboris habet. Preterea per quemlibet talem motum difformem in totali tempore adequate pertransitur aliquod spacium adequate: et tale spacium in tali tempore ab aliqua velocitate uniformi natum est pertransiri: igitur illa velocitas uniformis est tanta quanta est velocitas illius motus uniformis¹⁾ quo illud spacium in eodem tempore pertransitur adequate.

Die eigentliche Schwierigkeit, die darin läge, daß die erhaltene unendliche Reihe nicht konvergiert, übersieht THOMAS nicht ganz. Das kommt später. Das erste und grundlegende dieser Beispiele ist nun das der 2. *conclusio*²⁾ (Bl. (p. 4.)^v, Sp. 2): Es sei ein gewisser Zeitraum in „*partes proportionales*“ geteilt nach irgendeinem Verhältnis, und im ersten Zeitabschnitt habe ein Körper („*mobile*“) eine gewisse Geschwindigkeit, im zweiten Zeitabschnitt die doppelte, im dritten die dreifache usw. durch ebenfalls anführt (s. meinen Artikel in Zeitschr. für mathem. Unterr. 45, 1914, S. 209/28).

1) Das Original hat „*difformis*“. Das ist wohl ein Druckfehler.

2) In der 1. *conclusio* wird nur auf den „*fundamentalen*“ Satz über die Teilung in „*partes proportionales*“ hingewiesen, den wir soeben wiedergegeben haben.

alle ganzen Zahlen hindurch, so wird behauptet, daß die mittlere Geschwindigkeit der Bewegung („*tota velocitas totius temporis*“) sich zur Geschwindigkeit im ersten Zeitabschnitt verhalte wie der ganze Zeitraum zum ersten Zeitabschnitt. In der 4. conclusio (Bl. q. 1^r, Sp. 2) wird dann das dahin erweitert, daß die in der ganzen Zeit zurückgelegte Wegstrecke zur Wegstrecke des ersten Abschnitts im quadrierten Verhältnis („*in proportione duplicata*“) der ganzen Zeit und des ersten Zeitabschnitts stehe. Das wird durch Zusammensetzung der Verhältnisse bewiesen. THOMAS gibt auch gleich ein Beispiel. Das gegebene Verhältnis sei $\frac{3}{2}$, so ist das Verhältnis der Zeiten 3, das der Geschwindigkeiten also auch 3, das der Wege 9. Allgemein können wir sagen: Ist die Zeit 1 nach dem Verhältnis $g (> 1)$ geteilt, so ist der erste Zeitabschnitt $1 - \frac{1}{g}$. War die anfängliche Geschwindigkeit c , so ist die mittlere Geschwindigkeit $c : (1 - \frac{1}{g})$, welcher Ausdruck zugleich den Gesamtweg darstellt. Der Weg im ersten Zeitabschnitt ist aber $c \cdot (1 - \frac{1}{g})$, das Verhältnis der Wege also $1 : (1 - \frac{1}{g})^2$. Im seinem allgemeinen Beweise benutzt THOMAS wirklich den Buchstaben g für das gegebene Verhältnis und f für unser $1 : (1 - \frac{1}{g})$, dann ergibt sich bei ihm die „*duplex proportio f*“ für die Wegstrecken. Wie f aus g berechnet wird, ist ihm bekannt; er kann es nur nicht allgemein ausdrücken.

Nun dieser Beweis! Bei THOMAS ist er ganz in Worten geführt. Er wird aber sofort viel leichter verständlich, wenn man ihm die graphische Darstellung unterlegt, die ORESME in dem zitierten Werk systematisch auseinandersetzt, vielleicht sogar mit diesem Werk einführte. Nun findet sich bei THOMAS allerdings keine Andeutung dieser Darstellung und er scheint sie wirklich haben vermeiden wollen. Es gab nämlich offenbar schon damals so etwas wie eine „arithmetische Schule“ (s. unten S. 167). Daß THOMAS die geometrische Versinnlichung kannte, ist aber zweifellos, und es erscheint mir bis auf weiteres fraglich, ob ohne eine solche die Scholastiker auf eine abstrakte Darstellung dieser Dinge überhaupt hätten kommen können. Ich will jedenfalls hier den Gedankengang des THOMAS mit der Darstellung ORESMES verbinden. ORESME errichtet eine der Geschwindigkeit proportionale Strecke jeweils als Senkrechte in einem Punkte der den Zeitraum vorstellenden Strecke und erhält dann als Maß des zurückgelegten Weges die Fläche zwischen der Grundstrecke, den beiden begrenzenden Senkrechten und der oberen Grenzlinie, die eine Parallele zur Grundstrecke im Falle der gleichförmigen, eine schiefe Gerade im Falle der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist. Im Falle $g = \frac{3}{2}$ hätten wir also bei der in Frage stehenden Bewegung die in Fig. 2 dargestellte Summe von immer schmaler und immer höher werdenden Rechtecken zu bilden, um den Gesamtweg zu erhalten. Diese Summe

läßt sich aber sofort durch eine andere Summe von Rechtecken ersetzen, die alle die Höhe c haben und deren Grundlinien eine geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{g}$ bilden (nämlich $1, \frac{1}{g}, \frac{1}{g^2}, \frac{1}{g^3}$ usw.). Daß aber die Summe dieser Reihe f ist (oder, wie THOMAS sagt, zum ersten Glied das Verhältnis f hat), weiß er.¹⁾ Die mittlere Geschwindigkeit ist also cf , wie wir sagen. Der Gesamtweg ist auch cf , der Weg im ersten Zeitabschnitt $\frac{c}{f}$, das Verhältnis der Wege f^2 . THOMAS will ja nun allerdings nur die mittlere Geschwindigkeit erhalten; und er sagt also nicht, daß er die Wege addiert. Aber er läßt ebenfalls die Geschwindigkeiten sich über die Reststrecken ausdehnen, die sich ergeben, wenn man den ersten, dann den zweiten usw. Zeitabschnitt weggenommen hat, und er sagt dann, daß die erste Geschwindigkeit ausgedehnt über die ganze „Stunde“ „*aliquid facit ad intensionem totius velocitatis*“ und ebenso von den übrigen, die zweite „*mache*“ aber im Verhältnis g weniger als die erste, die dritte wieder im Verhältnis g weniger als die zweite usw., weil die Zeiten in diesem Verhältnis abnehmen. Schließlich sagt er: „*igitur denominatio totius illius velocitatis*

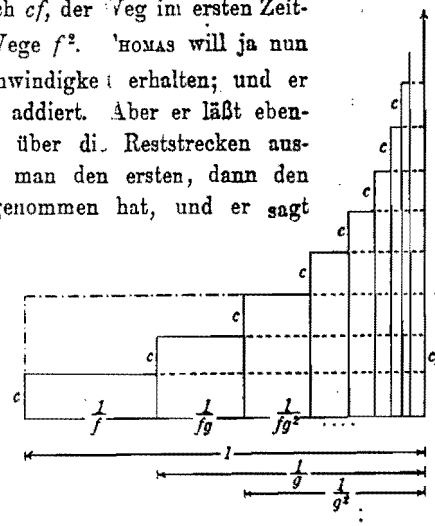


Fig. 2.

componitur ex infinitis continuo se habentibus in proportione g “, woraus er sofort auf das Verhältnis f der ganzen Summe zum Anfangsglied schließt. Der Gedankengang ist also genau derselbe wie bei der nach ORESME gegebenen Darstellung, wo sofort die Wege summiert werden.

Schreibt man die Reihe der ursprünglichen Rechtecke der Fig. 2 algebraisch an, so lautet die Reihe mit ihrer Summe

$$(2) \quad \frac{c}{f} \left(1 + \frac{2}{g} + \frac{3}{g^2} + \frac{4}{g^3} + \dots \right) = cf = \frac{c}{f} \cdot f^2,$$

und f^2 ist gleich $1 : (1 - \frac{1}{g})^2$. Der algebraische Vorgang, der der geometrischen Umformung in die andere Rechteckreihe entspricht, wäre folgender, wobei ich mich auf die in der Klammer stehende Reihe beschränke. Man löst diese Reihe in die Doppelreihe auf:

1) Der Satz über die Summe der geometrischen Reihe, der ja schon ARCHIMEDES bekannt war, ist wohl irgendwo im „tractatus proportionum“ bewiesen. Es ist kein Hinweis gegeben.

$$(3) \quad \begin{aligned} &1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots \\ &+ \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots \\ &+ \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots \\ &+ \frac{1}{g^3} + \dots, \end{aligned}$$

wo jede Zeile die Reihe der ersten Zeile als Faktor enthält. Bezeichnet man deren Summe mit f , so ist also die ganze Doppelreihe gleich

$$f \left(1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \dots \right) = f^2.$$

Diese algebraische Umformung¹⁾ ist ja auch leicht aus der Fig. 2 zu entnehmen.

THOMAS gibt nun zu diesem Satze in der 5. conclusio und einer Reihe von Korrelarien Zahlenbeispiele; mit ganzen Zahlen geht er bis $g = 8$, so daß das Verhältnis der Wege 64 zu 49 wird, welche Werte ausnahmsweise auch in Ziffern angeschrieben sind. Am Schlusse sagt er, wer die 4. conclusio richtig verstanden habe, könne noch unzählige Korrelarien beibringen.

5. Divergente Reihen. Wie ich oben schon andeutete, entging den Scholastikern die Möglichkeit nicht, daß die mittlere Geschwindigkeit und damit auch der Gesamtweg in endlicher Zeit unendlich werden könnte. Die 6. conclusio (Bl. q. 2.^r, Sp. 2) bringt einen solchen Fall. Es werde wieder die Zeit in „partes proportionales“ geteilt, die Geschwindigkeit wachse aber so, daß sie in irgendeinem Abschnitt zu der des vorhergehenden Abschnittes ein Verhältnis hat, das gleich dem Teilungsverhältnis $g (> 1)$ oder noch größer als dieses sei, dann ist die mittlere Geschwindigkeit unendlich und der durchlaufene Weg aus demselben Grunde unendlich, sagt THOMAS. Der Grund ist ja sehr einfach. Denn wenn die Geschwindigkeit in geometrischer Reihe mit dem Quotienten g wächst, während die zugehörigen Zeitabschnitte in geometrischer Reihe mit dem Quotienten $\frac{1}{g}$ abnehmen, so entsteht für die Gesamtstrecke eine Reihe von unendlich vielen unter sich gleichen Gliedern. Ist aber der Quotient der Geschwindigkeitsreihe gar noch größer als der reziproke Wert des Quotienten der Zeitreihe, so erhält man für die Wegstrecke eine Summe von unendlich vielen steigenden Gliedern. Das ist auch der Gedankengang bei THOMAS.

1) Diese Umformung wird noch heute benutzt (s. z. B. E. CESÀRO, *Algebr. Analysis etc.*, Leipzig 1904, S. 174). Am einfachsten erhält man ja die Summenformel für $1 + 2x + 3x^2 + \dots$, wenn man diese Reihe als Differentialquotienten der Reihe $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ auffaßt.

6. Reihen von der Form $1 + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \lambda^3 x^3 + \dots$ in inf. für $1 < \lambda < \frac{1}{x}$ und für $\lambda < 1$. Der moderne Leser wird ja gleich sehen, daß die beiden unterschiedenen Fälle sich in den einen $\lambda x < 1$ zusammenfassen lassen und daß damit die Konvergenz der Reihe, die ja eine geometrische ist, schon entschieden ist. Für THOMAS sind es aber zwei Fälle, da im einen die Geschwindigkeiten steigen, im andern abnehmen. Es sei also zunächst ein Zeitraum wieder in Proportionalteile geteilt nach dem Verhältnis $g (> 1)$, die Geschwindigkeiten in den einzelnen Abschnitten sollen in geometrischer Reihe steigen, deren Quotient $f < g$ sei, und es sei $\frac{g}{f} = h$ („excedat proportio g . proportionem f . mediante proportione h .“), dann verhält sich, so sagt THOMAS in der 7. conclusio, der Gesamtweg zum Weg im ersten Zeitabschnitt wie etwas nach dem Verhältnis h in „partes proportionales“ Geteiltes zu seinem ersten Teil, also in unserer Ausdrucksweise wie $1 : \left(1 - \frac{1}{h}\right)$. Der Beweis folgt ja einfach aus der Zusammensetzung der Verhältnisse der Zeitabschnitte und der zugehörigen Geschwindigkeiten. Die Zahlenbeispiele können wir hier flüchtig übergehen.

Der zweite Fall wird in der 8. conclusio betrachtet. Die Zeitstrecke sei wie immer nach dem Verhältnis $g (> 1)$ geteilt, und die Geschwindigkeiten sollen abnehmen in geometrischer Reihe nach dem Verhältnis $f (> 1)$, dann fallen natürlich die Wegstrecken stetig in dem zusammengesetzten Verhältnis $f \cdot g = h$. Und die Summe verhält sich dann zum ersten Glied wie $1 : \left(1 - \frac{1}{h}\right)$. Ich will aber doch einmal hier die Gelegenheit ergreifen und mitteilen, in welcher Form das letztere von THOMAS immer wieder gegeben wird. Er sagt (Bl. q. 3.^r, Sp. 2):

ergo totale spacium pertransitum in tota hora componitur ex infinitis continuo se habentibus in proportione h . igitur totale spacium se habet ad primum illorum spaciorum quod est pertransitum in prima parte proportionali in proportione in qua se habet aliquod totum diuisum per partes proportionales proportione h . ad primam eius partem quod fuit probandum.

Der Verfasser gibt natürlich noch ein paar Zahlenbeispiele, die jedesmal ebenso weitläufig ausgeführt werden wie der allgemeine Satz mit seiner Erläuterung und seinem Beweis.

7. Reihen von der Form $1 + x + \lambda x^2 + \mu x^3 + \lambda^2 x^4 + \mu^2 x^5 + \dots$. In der 9. conclusio macht THOMAS die Voraussetzung, daß die Geschwindigkeiten in den ungeraden und geraden Zeitabschnitten je für sich in geometrischer Reihe wachsen (oder auch abnehmen), und er gibt die Wegsummen zunächst getrennt an, indem er ganz richtig die Zeitabschnitte, wenn die Zeit im Verhältnis g wie oben immer geteilt ist, im Verhältnis g^2

als abnehmend voraussetzt und hinzufügt, daß der Gesamtweg für die geraden oder ungeraden Abschnitte unendlich wird, wenn die Geschwindigkeiten in einem Verhältnis wachsen, das größer als g^2 ist. In den Beispielen setzt er dann auch eine Beziehung zwischen den Anfangsgeschwindigkeiten im ersten ungeraden und ersten geraden Zeitabschnitt fest, so daß er den Gesamtweg angeben kann. Ich gebe hier zum ersten correlarium eine Figur (Fig. 3). Die Zeit soll im Verhältnis 2 geteilt sein, das Verhältnis der steigenden Geschwindigkeiten in den ungeraden Zeitabschnitten ist ebenfalls 2, in den dazwischenliegenden geraden Zeitabschnitten soll die Geschwindigkeit jedesmal gleichmäßig von Stufe zu Stufe zunehmen. Das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeiten in diesen geraden Zeitabschnitten ist dann auch 2, und der Weg im zweiten Abschnitt ist $\frac{3}{4}$ des Weges im ersten, der als Strecke von einem Fuß Länge angenommen wird („unum pedale“). Es ist dann leicht zu berechnen, daß der Gesamtweg

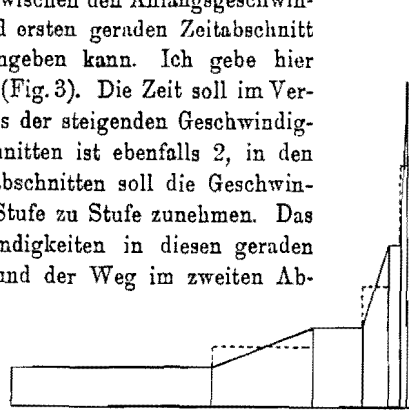


Fig. 3.

$3\frac{1}{2}$ Fuß beträgt. Im zweiten correlarium nimmt THOMAS das Verhältnis der Zeitabschnitte zu 4, das der ungeraden Geschwindigkeiten zu 3, die geraden läßt er wachsen, wie in Fig. 3. Der Gesamtweg ergibt sich dann zu $\frac{24}{13}$ des Weges im ersten Zeitabschnitt. In einem dritten correlarium gibt er dann noch andere Beispiele, zum Teil als Fragen, bei denen z. B. das Verhältnis der beiden Anfangsgeschwindigkeiten gegeben ist und auch darauf hingewiesen wird, daß man, wenn ich es modern ausdrücke, Reihen von der Form

$$(4) \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \lambda x^4 + \mu x^5 + \nu x^6 + \rho x^7 + \lambda x^8 + \dots$$

mit beliebigen Zwischenräumen betrachten könne (wobei den Gliedern x, x^2, x^3 noch beliebige Koeffizienten beizufügen wären, die sich bei den entsprechenden Gliedern immer wiederholen würden). THOMAS findet aber selbst schließlich, daß sich weitere Beispiele jeder Leser selbst machen könne und sagt:

Ideo calculator his dedaleis laberinthulis implicitus: verbisque multiplicibus multiformibusque proportionibus implicatus: inflate bucce garritum contineat.

8. Reihen von der Form $1 + \left(c + \frac{a}{b}\right)x + \left(c + \frac{a}{b\lambda}\right)x^2 + \left(c + \frac{a}{b\lambda^2}\right)x^3 + \dots$

Die 10. conclusio (Bl. (q. 4.)^v, Sp. 1) beginnt THOMAS sofort mit einem Beispiel, das ich wohl gleich in der Form schreiben darf:

$$(5) \quad 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots$$

Ich setze dabei, wie in den Überschriften bisher immer, sowohl den ersten Zeitabschnitt wie die erste Geschwindigkeit gleich 1. Wenn THOMAS nicht lediglich das Verhältnis der Summe zum ersten Glied angibt, nimmt er gewöhnlich „2 pedalia“ als Anfangsgeschwindigkeit, versteht aber darunter öfters, daß der Körper im ersten Zeitabschnitt wirklich 2 Fuß Weg zurücklege. Das ändert die ganze Reihe nur um einen Faktor, den ich im folgenden immer, ohne es eigens zu sagen, unterdrücke. Es sind dann in der Reihe (5) die Zeitabschnitte $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$ und die bezüglichen Geschwindigkeiten $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \dots$. THOMAS behandelt nun die Reihe (5) so, daß er von ihr die Reihe

$$(6) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

abtrennt, so daß eine weitere geometrische Reihe

$$(7) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots$$

übrig bleibt. Die Gesamtsumme gibt er richtig zu $\frac{7}{3}$ an.

Ebenso behandelt er die Reihe

$$(8) \quad 1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{19}{16} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots,$$

deren Summe $\frac{5}{2}$, und die Reihe

$$(9) \quad 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{13}{12} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots,$$

deren Summe $\frac{20}{9}$ ist. Daß er aber ganz gut das in der Überschrift ausgedrückte allgemeine Fortschrittzgesetz erkennt, das er nur in Worten nicht angeben kann, zeigt sich im Schlußparagrafen, der beginnt:

¶ Innumera talia correlaria possunt inferri diuidendo horam aliis speciebus per proportiones: et faciendo excessus quibus alie partes excedunt primam in certa proportione continue se habere.

Und er konstruiert, um das zu bekräftigen, gleich noch zwei weitere Beispiele, die er aber nicht mehr ausführt, nämlich

$$(10) \quad 1 + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 2\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3^2} + 2\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots$$

und

$$(11) \quad 1 + 3\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + 3\frac{1}{10} \cdot \frac{3^2}{5^2} + 3\frac{1}{20} \cdot \frac{3^3}{5^3} + \dots$$

Es liegt ihm also nur daran, daß auch die Restreihe eine geometrische ist. Die kleine Schwierigkeit bei den Reihen (10) und (11), daß das erste Glied isoliert steht, hätte er sicher leicht überwunden.

9. Reihen von der Form $1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}x^3 + \dots$. Es soll, so beginnt THOMAS die 11. conclusio (Bl. (q 5.)^r, Sp. 2), die Stunde wie bisher eingeteilt sein in beliebige „partes proportionales“, der Körper aber soll sich im zweiten Zeitabschnitt $\frac{3}{2}$ mal so schnell bewegen wie im ersten, im dritten Zeitabschnitt $\frac{4}{3}$ mal so schnell wie im zweiten, dann der Reihe nach $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ usw. mal so schnell wie im vorhergehenden. Man könne dann freilich eine allgemeine Regel für den in der ganzen Stunde zurückgelegten Weg nicht angeben, aber nichtsdestoweniger diesen Weg in jedem einzelnen Falle bei beliebiger Teilung des Zeitraums bestimmen. In diesem Sinne gibt THOMAS nur zwei Beispiele, und zwar die Reihen

$$(12) \quad 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = 3$$

und

$$(13) \quad 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{2} \cdot \frac{2^2}{3^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2^3}{3^3} + \dots = 6.$$

Schon durch die Art, wie ich diese Beispiele hier wiedergab, wollte ich andeuten, daß THOMAS sehr wohl die Reduktion der ursprünglich in Produktform angenommenen Koeffizienten (bzw. Geschwindigkeiten) auf einfache Brüche erkannte. Er redet darüber gar nicht weiter. Die Art der Behandlung ist so, daß er die Reihe

$$(14) \quad 1 + \frac{3}{2}x + \frac{4}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{6}{2}x^4 + \dots$$

zerlegt in die Summe der beiden Reihen

$$(15) \quad \begin{aligned} &1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ &+ \frac{1}{2}x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{4}{2}x^4 + \dots, \end{aligned}$$

deren zweite ja schon aus der 2. conclusio bekannt ist, hier aber für beide Beispiele wiederum ganz von vorn behandelt wird. Am Schlusse gibt er noch eine zweite Zerlegung an, nämlich

$$(16) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \dots \\ &+ \frac{1}{2} + \frac{2}{2}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^4 + \dots, \end{aligned}$$

die ja auf dieselben Reibengattungen führt.

1) Hier nimmt THOMAS z. B. bei der Reihe (12) die Anfangsgeschwindigkeit zu 2 und den damit in der ganzen Stunde zurückgelegten Weg zu 4, bei der Reihe (13) dieselbe Anfangsgeschwindigkeit 2, den damit in der Stunde zurückgelegten Weg aber zu 3 an. Das sind natürlich nur Auffassungsverschiedenheiten, verursacht durch die mangelhafte Definition von „Geschwindigkeit“.

10. Reihen von der Form $1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \dots$ für $1 < \lambda_i \leq i + 1$. In der 12. und letzten conclusio Bl. (q. 5.)^r, Sp. 2) betrachtet THOMAS Reihen von der Form $1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \dots$, wo die λ_i nach einem bestimmten Gesetz fortschreiten, aber einerseits immer > 1 sind, andererseits niemals größer werden als das zugehörige Glied aus der Reihe 2, 3, 4, 5, 6, ... Da THOMAS die Summen der Reihen $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ und $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ kennt, kann er demnach die Behauptung aufstellen, daß die Summe der von ihm betrachteten Reihen immer zwischen den Summen dieser beiden Reihen liegt. Er tut das zwar nicht allgemein, weil ihm dazu die Ausdrucksmittel fehlen, aber daß er die Kenntnis dieses allgemeinen Satzes besitzt, geht aus seinen Beispielen hervor.

Hier treten nun gleich zwei Reihen auf, die wir heute durch die Logarithmusfunktion zu summieren imstande sind, nämlich die Reihen

$$(17) \quad 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = 2 + \ln 2$$

und

$$(18) \quad 1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2^2}{3^2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2^3}{3^3} + \dots = 3 + \ln \frac{3}{2}.$$

THOMAS gibt für die erste an, daß ihre Summe zwischen 2 und 4, für die zweite, daß sie zwischen 3 und 9 liegt. Setzen wir allgemein

$$(19) \quad s = 1 + \frac{2}{1}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \dots,$$

so können wir ja schreiben

$$(20) \quad \begin{aligned} s &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ &+ x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1-x} + \ln \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

THOMAS wußte für jeden Wert von x , daß

$$(21) \quad \frac{1}{1-x} < s < \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Daß hier dem Scholastiker logarithmische Reihen unterkamen, ist ja natürlich reiner Zufall. Ich benutze aber doch diese Gelegenheit, die Ausführungen des Verfassers über die Reihe (17) im Original wiederzugeben, um zu gleicher Zeit dem Leser eine deutlichere Vorstellung der scholastischen Behandlungsweise zu vermitteln, als dies durch die bisher mitgeteilten kurzen Proben geschehen konnte. Die 12. conclusio beginnt:

1) Vgl. die von G. ENKSTRÖM gegebene Ausführung zu der Reihe (17) in diesem Bande der Biblioth. Mathem. S. 89.

Si sit aliquod tempus diuisum per partes proportionales proportione dupla et in prima parte proportionali mobile moueatur aliquanta velocitate: et in secunda in duplo velocius quam in prima: et in tertia in sexquialtero velocius quam in prima: et in quarta in sexquitercio velocius quam in prima. et sic consequenter procedendo per omnes species proportionis superparticularis¹⁾: spatium pertransitum in totali tempore est maius quam duplum ad spatium pertransitum in prima parte proportionali et minus quam quadruplum. Probatur prima pars quia diuisa sic hora per partes proportionales proportione dupla: et mobili moto continuo vniformiter illo motu quo mouetur in prima parte proportionali spacium pertransitum adequate in tota hora esset adequate duplum ad spacium pertransitum in prima parte proportionali vt patet ex se: sed modo mobile velocius mouetur quam tunc cum in qualibet parte proportionali dempta prima modo velocius mouetur quam tunc et in prima eque velociter sicut tunc: igitur pertransit plus quam duplum spacium ad spacium pertransitum in prima parte proportionali. Probatur secunda pars quia si illud mobile mouetur in prima parte proportionali aliquantum velociter: et in secunda in duplo: et in tertia in triplo velocius quam in prima: et sic consequenter vt ponitur in casu quarte conclusionis: tunc adequate pertransiret quadruplum spacium ad spacium pertransitum in prima parte proportionali: vt patet ex quarta conclusione: sed modo mouetur in totali hora tardius quam tunc per omnes partes proportionales dempta prima et secunda. et in prima et secunda equaliter sicut tunc: igitur modo pertransit minus spacium quam tunc in totali hora: et tunc quadruplum pertransit ad spacium pertransitum in prima parte proportionali: igitur modo minus quam quadruplum quod fuit probandum. Et sic patet conclusio.

Im 1. correlarium wird mit genau derselben Ausführlichkeit die Reihe (18) behandelt. Das 2. correlarium bringt das Beispiel

1) Die „proportio superparticularis“ bedeutet ein Verhältnis (> 1), bei dem das Vorderglied das Hinterglied um einen aliquoten Teil des letzteren übertrifft, im besondern hier die Zahlen der Form $a + \frac{1}{n}$, wie $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ usw., die der Reihe nach „proportio sexquialtera, sexquitercia, sexquiquarta etc.“ heißen. Im Gegensatz dazu steht die „proportio suprapartiens“; z. B. ist die „proportio suprabipartiens tertias“ gleich $\frac{5}{3}$. Betragen die Ganzen mehr als 1, so wird das in der Weise ausgedrückt, wie es die folgenden Spezialfälle zeigen. Es ist z. B. $2\frac{1}{4}$ die „proportio dupla sexquiquarta“, $3\frac{2}{3}$ die „proportio tripla suprabipartiens tertias“, $\frac{64}{19}$ (s. oben S. 158) ist die „proportio superquindecimpartiens quadragesimasnonas“. Von der Schwerfälligkeit des Textes kann sich der Leser hiernach wohl einen kleinen Begriff machen.

$$(22) \quad 6\frac{1}{4} > 1 + \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{7}{4} \cdot \frac{11}{8} \cdot \frac{3^2}{5^2} + \frac{7}{4} \cdot \frac{19}{16} \cdot \frac{3^3}{5^3} + \dots > 2\frac{1}{2},$$

das 3. correlarium das Beispiel

$$(23) \quad 2\frac{1}{4} > 1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{9}{7} \cdot \frac{1}{3^3} + \dots > \frac{3}{2},$$

endlich das 4. correlarium die Reihe

$$(24) \quad 1\frac{7}{9} > 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{4^4} + \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{4^5} + \dots > \frac{4}{3},$$

wobei die Koeffizienten der ungeraden Glieder immer Zahlen der Form $1 + \frac{2}{n}$, die der geraden Glieder Zahlen der Form $1 + \frac{3}{n}$ sein sollen. Nur für das zweite Glied ist offenbar eine Ausnahme gemacht, damit dieser Koeffizient nicht > 2 wird. Für diese letzteren drei Reihen gibt THOMAS nur die Resultate an, indem er sagt, daß diese so wie bei dem 1. correlarium bewiesen würden.

In betreff der letzten drei Reihen hat mir Herr G. ENESTROM die folgenden Bemerkungen zur Verfügung gestellt.

Das allgemeine Glied der Reihe (22) ist offenbar

$$\frac{(2^2+3)(2^3+3)(2^4+3)\dots(2^n+3)}{2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot \dots \cdot 2^n} \cdot \frac{3^{n-1}}{5^{n-1}},$$

und der Koeffizient hat also einen Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n+3)(n-1)}$. Man dürfte hieraus mit recht großer Wahrscheinlichkeit folgern können, daß die Summe der Reihe nicht einmal durch Zuhilfenahme der JACOBSCHEN Thetafunktionen ermittelt werden kann. Um die Reihen (23) und (24) zu summieren, genügt es, die Formeln

$$a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q},$$

$$2\left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \dots\right) = \ln\left(\frac{1+h}{1-h}\right)$$

zu benutzen. Für die Reihe (23) ist $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$, für die Reihe (24) ist $h = \frac{1}{4}$. Nachdem man im ersten Falle die logarithmische Reihe summiert hat, ist nur eine geometrische Reihe übrig; im zweiten Falle hat man drei Reihen dieser Art zu summieren. Als Resultat bekommt man

für die Reihe (23)

$$\sqrt{3} \ln(\sqrt{3} + 2) - \frac{1}{2} = 1.78,$$

für die Reihe (24)

$$4 \ln\left(\frac{5}{3}\right) - 2 + \frac{4}{3} + \frac{12}{31} - \frac{1}{2} = 1.51.$$

1) Im Original steht (wohl nur aus Versehen) „sexdecuplum sexquiquartum“.

Für THOMAS ist es eine sehr peinliche Sache, daß er den Weg des Körpers bei Reihen der hier gekennzeichneten Art nicht genau bestimmen kann. Denn es scheint bei den damals im Schwange befindlichen dialektischen Diskussionen öfters vorgekommen zu sein, daß ein bösartiger Disputant („illiberalis atque acerrimus calculator¹⁾“) den Gegner durch Stellung solcher tückischer Beispiele in die größte Verlegenheit brachte („grandia verba trutinando inflata. bucca: supercilio eleuato: rugataque fronte: atque ore tragico . . . multisque clamoribus respondentem vulgo superatum atque deuictum nitetur ostendere“).

Es ist interessant, daß THOMAS die Unmöglichkeit nicht in der Sache selbst sieht, sondern nur für eine unangenehme Folge der Beschränktheit des menschlichen Verstandes hält („impossibile est naturaliter intellectum finite capacitatis talem velocitatem sic difformem ad vniiformitatem redigere“). Er glaubt aber, daß die Seelen später das alles erkennen werden („Credo tamen animas separatas a corpore et intelligentias in imperspecto tempore omnia ista cognoscere“). Trotz dieser Resignation gibt er dem Disputanten doch den Rat, wenn eine solche Frage „in publica et celebri litteraria palestra“ auftrete, zunächst nach dem Vorbild von ORESME („NICOLAUS HOREN“²⁾) zu behaupten, daß eine Irrationalzahl herauskommen müsse („spacia pertransita irrationalia esse“). Das dürfte ja auch in der Mehrzahl der Fälle richtig sein. Da er es aber auch dann noch für möglich hält, daß der „calculator“ sich so beträgt, wie oben geschildert, gibt er dem Disputanten noch zwei rhetorische Kniffe an, durch die er sich gegebenenfalls aus der Schlinge ziehen möge.³⁾

* * *

1) „Calculator“ war ein Gelehrter, der sich besonders mit der Untersuchung des „motus“ befaßte, wo natürlich immer, wenn auch meist einfache, Zahlenbeispiele benutzt wurden. Im besonderen wurde jener SUISETH „Calculator“ genannt, der von allen späteren Scholastikern zitiert wird und den unser Autor auf dem Titelblatt nennt. Es sei angemerkt, daß in einer Handschrift der *Calculations*, die sich in der Bibliothèque Nationale zu Paris befindet, der Verfasser RICCARDUS DE GHELYM ESHEDI genannt wird; vgl. DUHEM a. a. O. S. 418.

2) Hierzu gibt THOMAS keinen Verweis. Er führt sonst von ORESME nur den *Tractatus proportionum* (gedruckt Venedig 1505) an, in welchem aber derartige Dinge gar nicht behandelt werden.

3) Vgl. darüber DUHEM a. a. O. S. 542/43. Die erste dieser „Cautelen“ besteht darin, die Forderung des Calculators lächerlich zu machen, u. a. dadurch, daß man Feder und Tintenfaß verlange, um das Verlangte zu berechnen („petaturque calamus et atramentarium vt specie multiplicationis ceterisque algorismi speciebus calculari valeat velocitatis intensio in casu per eum posito“). Jedenfalls ist kein Zweifel, daß die Pariser Scholastiker im Rechnen „auf der Federn“ (so drückten sich die im Anfang des 16. Jahrh. erschienenen deutschen Rechenbücher gern aus) gut zu Hause waren.

Mein Bericht über das 3. Kapitel des *Liber de triplici motu* von ALVARUS THOMAS ist zu Ende. Es scheint nicht, daß THOMAS auch noch an anderen Stellen seines Werkes unendliche Reihen benutzt. Wenn ich aber meinem Aufsatz einen allgemeineren Titel gegeben habe, so kann ich dies damit begründen, daß ja die Hauptteile der Lehre von THOMAS schon bei ORESME vorkommen, der selbst wahrscheinlich ebensowenig der Erfinder ist. ORESME kennt schon die Teilung einer Strecke nach einer geometrischen Reihe von beliebigem Verhältnis¹⁾ und er wendet die Summen der Reihen $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ und $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ an. Auch eine Bewegung von der durch Fig. 3 dargestellten Art betrachtet er. Die späteren Scholastiker haben ORESMES Beispiele nicht übersehen. Im 2. Kapitel der *Calculations* jenes sog. SUISETH, der nur wenig jünger sein kann als ORESME, und in einem anonymen Traktat *A est unum calidum*, der vor 1390 geschrieben sein muß, finden sie sich wieder.²⁾ Aber die Oxforder Schule, der diese beiden Werke entstammen, verschmähte schon, wie später ALVARUS THOMAS, die geometrische Versinnlichung. Dasselbe tut der Florentiner Arzt und Philosoph BERNHARD TORNIUS oder TORNI(o) († 1500) in seiner Schrift *In capitulum de motu locali HENRISBERI quedam annotata*, wo er nur andere Verhältnisse als ORESME benutzt, nämlich 3 und $\frac{3}{2}$, nach denen die Zeitstrecke in „partes proportionales“ geteilt wird.³⁾ Ebensowenig benutzt eine graphische Darstellung der Genter Philosoph JOHANNES DULLAERT († 1513), der am Kollegium zu Montaigu lehrte und in seinen *Questiones in libros phisicorum ARISTOTELIS* (gedruckt Paris 1506) Beispiele nach ORESME formte, indem er als grundlegendes Verhältnis 4, 5 und 6 einführte.⁴⁾

Bei all diesen Reihen bildeten die Koeffizienten entweder selbst eine geometrische Reihe (aber nur mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$) oder die Reihe 1, 2, 3, 4, . . . Wenn nicht weitere Vorgänger noch aufgefunden werden,

1) Aus DUHEM (a. a. O. S. 393, S. 531 und S. 540) muß man schließen, daß ORESME nur das Verhältnis 2 in Betracht zog. Das ist keineswegs der Fall. Ich sehe aus den von Herrn DUHEM gemachten, mir in freundlichster Weise zur Verfügung gestellten Auszügen aus der zitierten Handschrift, daß z. B. im 9. Kapitel des 3. Teiles das Teilungsverhältnis 4 zugrunde gelegt wird. Sicherlich hatte also schon ORESME den allgemeinen Begriff der Teilung in „partes proportionales“.

2) Vgl. DUHEM, a. a. O. S. 479 und S. 476. Der Traktat *A est unum calidum* ist nur handschriftlich vorhanden. Die Druckausgaben der *Calculations* (o. J.; 1488; 1498; 1520) sind bei DUHEM (a. a. O. S. 415/16) näher beschrieben.

3) Vgl. DUHEM, a. a. O. S. 501. TORNIUS Schrift wurde zuerst 1484 zu Pisa gedruckt (DUHEM S. 495), dann in die Kommentare zu dem *Tractatus GULIELMI HENTISBERI de sensu composito et diuiso* (Venedig 1494, s. meinen Aufsatz in *Biblioth. Mathem.* 13, 1912/13, S. 117/18) aufgenommen.

4) Vgl. DUHEM, a. a. O. S. 531 und S. 527, Fußnote 1.

wäre also THOMAS die Kombinierung dieser beiden Reihenarten zu verschiedenartigen Beispielen und die erste systematische Darstellung der ganzen Lehre zuzuerkennen. Die Tatsache der Summierung der Reihe $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$ ist aber schon ein ganz neues Faktum im christlichen Mittelalter und die THOMASSCHE Darstellung eine weitere bemerkenswerte Erscheinung auf dem Felde der Behandlung unendlicher Reihen vor der Erfindung der Differentialrechnung.¹⁾ Eine Betrachtung über die Konvergenz der summierten Reihen habe ich nicht finden können, wiewohl mindestens Reihen wie (22) schon geeignet gewesen wären, eine Bemerkung darüber zu veranlassen. Die vorkommenden divergenten Reihen sind sämtlich solche, bei denen die Divergenz selbstverständlich ist. Wir werden aber den Scharfsinn dieser Gelehrten auch in mathematischen Dingen nicht unterschätzen, wenn wir bedenken, wie außerordentlich dürftig ihre mathematischen Kenntnisse waren. DUNEM fragt mit Recht, was man wohl von jenen Männern — und es waren deren nicht wenige, die das hier Auseinandergesetzte damals beherrschten — hätte erhoffen dürfen, wenn es ihnen vergönnt gewesen wäre, ARCHIMEDES zu lesen, ja man darf vielleicht hinzufügen, wenn sie auch nur von EUKLID etwas mehr als die allerersten Bücher gekannt hätten.

1) Ich weise auf eine Arbeit von G. ENESTRÖM hin (Biblioth. Mathem. 12, 1911/12, S. 135—148), in welcher er zeigte, daß P. MEMORI in einem Buche *Novae quadraturae arithmeticae* (Bononiae 1660) lange vor JAKOB BERNOULLI die Divergenz der harmonischen Reihe bewies, mehrere andere Reibengattungen summierte und sich überhaupt allgemein mit Konvergenzfragen beschäftigte.

Berichtigung zu meinem Artikel: *Zwei Bemerkungen zu STIRLING'S Lineae tertii ordinis Neuronianae* dieses Bandes: S. 57 Z. 20 v. u. lies „ ν -fachen Punkt“ statt „ $(n - \nu)$ -fachen Punkt“.